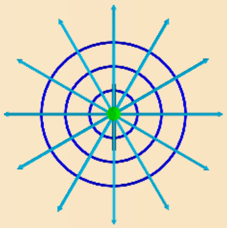
GEOMETRIA ANALITICA
la retta



Corso multimediale di matematica

Prof. Calogero Contrino

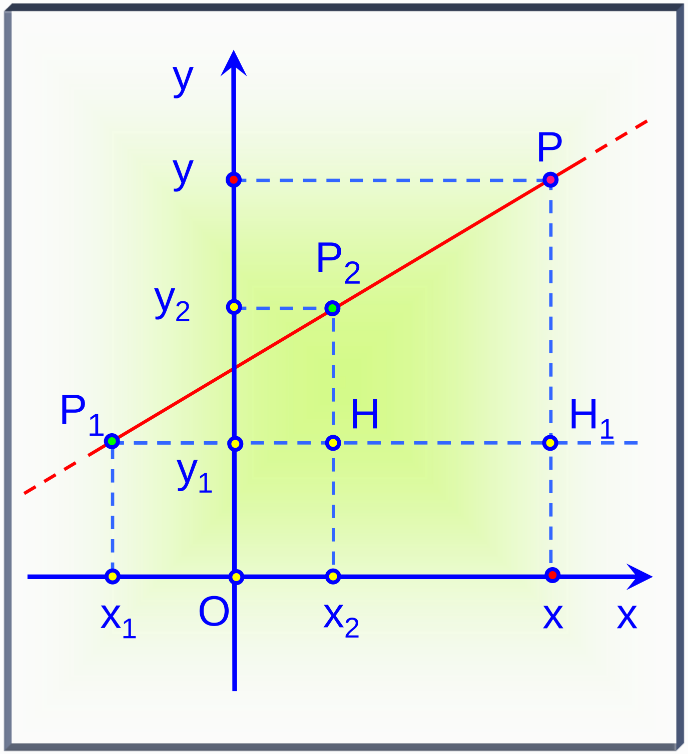
equazione della retta passante per due punti

Si pone il seguente: problema

assegnati due punti **P_1 (x_1 , y_1)** e **P_2 (x_2 , y_2)** sul piano cartesiano, essi individuano una direzione in modo univoco . Ci si chiede a quali condizioni algebriche debbano sottostare le coordinate di un generico punto **P (x , y)** affinche' esso risulti allineato ai due punti assegnati .

Nel seguito si cercherà la soluzione del problema .

Con riferimento alla figura a lato , si prenda in esame il caso in cui il punto **P(x , y)** risulti esterno al segmento **P_1P_2** , se fosse interno il ragionamento sarebbe analogo .



Considerate le perpendicolari all'asse delle ascisse ed a quello delle ordinate rispettivamente dai punti **P_1**, **P_2** e **P** ,

Siano i punti **H** e **H_1** le intersezioni delle perpendicolari all'asse delle ascisse per **P_2** e **P** con la perpendicolare all'asse delle ordinate per **P_1**

I triangoli **$P_1 H P_2$** e **$P_1 H_1 P$** sono simili , pertanto si può scrivere la seguente proporzione :

$PH_1 : P_2H = H_1P_1 : HP_1$ da cui si ottiene: $\dfrac{PH_1}{P_2H} = \dfrac{H_1P_1}{HP_1}$

equazione della retta passante per due punti

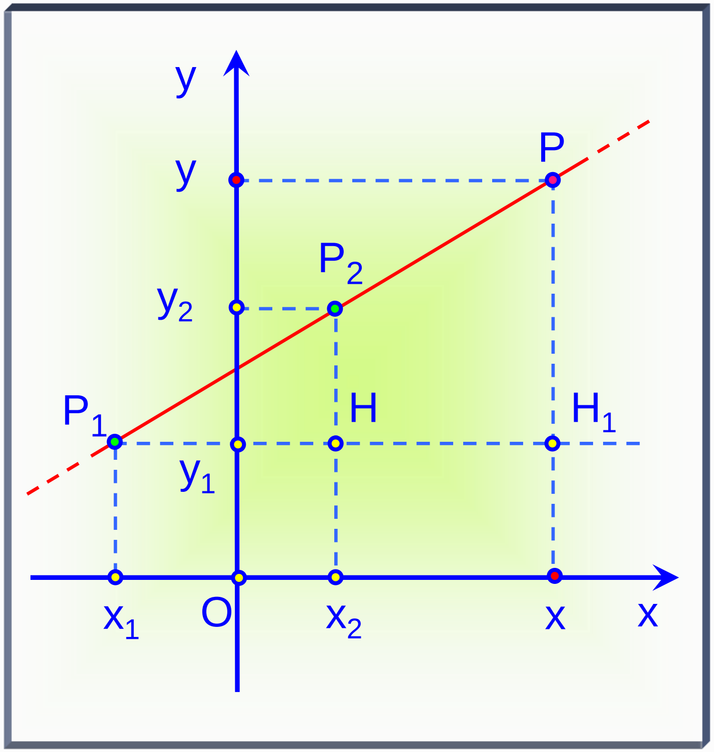
Esplicitando la misura dei segmenti mediante le coordinate dei punti si avra' :

$$\frac{PH_1}{P_2H} = \frac{H_1P_1}{HP_1} \Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad 1)$$

La relazione **1)** che esprime la condizione di allineamento di un punto generico con altri due punti assegnati e' un'equazione nelle incognite **x** , **y** e rappresenta sul piano cartesiano la retta passante per due punti assegnati .

Pertanto l'equazione della retta passante per due punti assegnati e' :

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$



equazione generale della retta (equazione in forma implicita)

Dalla ***1)*** si ottiene:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Rightarrow (y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$$ da cui :

$$(x_2-x_1)\,y - y_1(x_2-x_1) = (y_2-y_1)\,x - x_1(y_2-y_1)$$

E quindi trasportando tutti i termini a primo membro ed ordinando si ottiene :

$$-(y_2-y_1)\,x + (x_2-x_1)\,y + x_1(y_2-y_1) - y_1(x_2-x_1) = 0$$ Ponendo :

$-(y_2-y_1)=a$; $(x_2-x_1)=b$; $x_1(y_2-y_1)-y_1(x_2-x_1)=c$.

Sostituendo , si ottiene infine : $\boxed{ax+by+c=0}$ *2)*

Data la generalità del ragionamento precedente si può pertanto enunciare il seguente :

TEOREMA

ogni retta del piano cartesiano è rappresentata dall'equazione lineare in due incognite :

$$ax+by+c=0$$

equazione generale della retta (equazione in forma implicita)

Esiste il teorema inverso del precedente di cui si riporta soltanto l'enunciato :

TEOREMA

Ogni equazione lineare del tipo $ax + by + c = 0$ con a e b non contemporaneamente nulli rappresenta sul piano cartesiano solo e soltanto una retta

L'equazione $ax + by + c = 0$ è detta equazione generale della retta od anche equazione in forma implicita perché non è reso esplicito il legame tra le variabili (x, y)

condizione di appartenenza di un punto ad una retta

Per quanto visto , affinchè un punto **P (x_P , y_P)** appartenga alla retta **r : ax + by + c = 0** , le sue coordinate devono essere soluzione dell'equazione che rappresenta la retta **r** ,deve cioè aversi : $a x_P + b y_P + c = 0$

esempio

con riferimento alla figura a lato, e' data la retta di equazione :

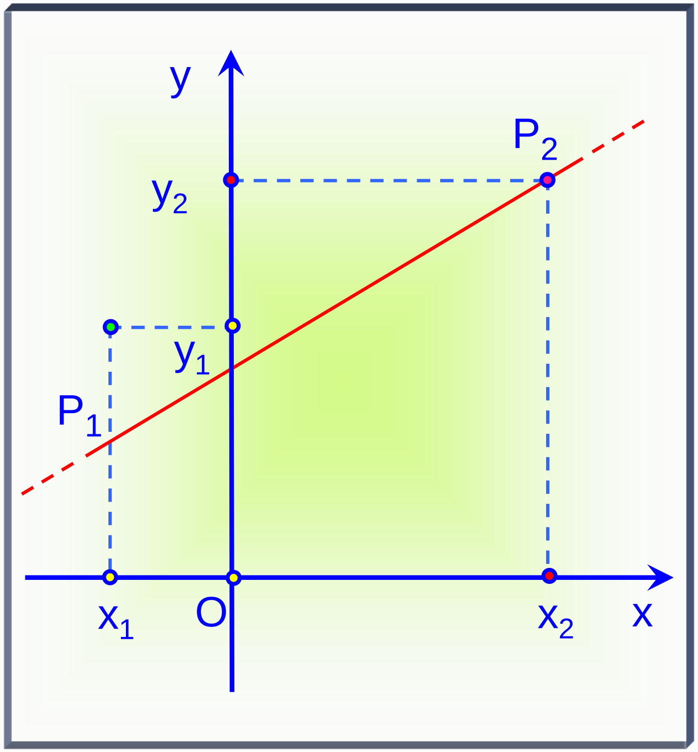
$$a x + b y + c = 0$$

il punto **P_1 (x_1 , y_1)** non appartiene alla retta data e si ha:

$$a x_1 + b y_1 + c \neq 0$$

il punto **P_2 (x_2 , y_2)** appartiene alla retta data e si ha:

$$a x_2 + b y_2 + c = 0$$

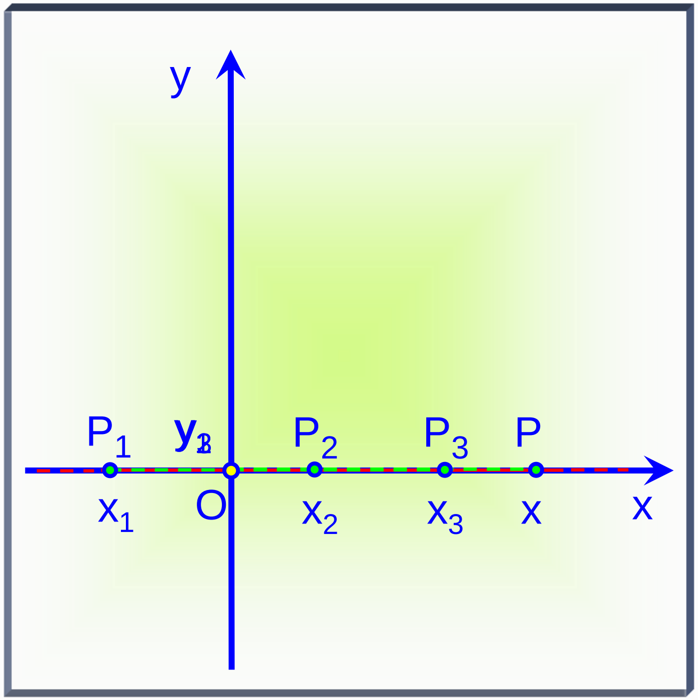


rette particolari : retta coincidente con l'asse delle ascisse

Si esamineranno nel seguito particolari situazioni per rette nel piano cartesiano e si verificheraʼ che a tali situazioni corrispondono diverse tipologie di equazioni che comunque corrispondono a casi particolari dellʼ equazione lineare **ax + by + c = 0** .

primo caso
retta coincidente con l'asse delle ascisse

con riferimento alla figura a lato, sia data la retta **r** coincidente con l'asse delle ascisse.



Si osservi che i punti della retta in questione (**… P_1 … … P2 … … P3 … P …**) sono tutti caratterizzati dall'avere una ordinata nulla .

Tale situazione si traduce algebricamente nell' equazio-ne : **y = 0**

Che è un caso particolare dell'equazione:

a x + b y + c = 0

in cui i coefficienti assumono i valori:

a = 0 ; b = 1 ; c = 0 .

rette particolari : retta coincidente con l'asse delle ordinate

secondo caso
retta coincidente con l'asse delle ordinate

con riferimento alla figura a lato, sia data la retta **r** coincidente con l'asse delle ordinate.

Si osservi che i punti della retta in questione (**… P_1 … … P2 … … P3 … P …**) sono tutti caratterizzati dall'avere un'ascissa nulla .

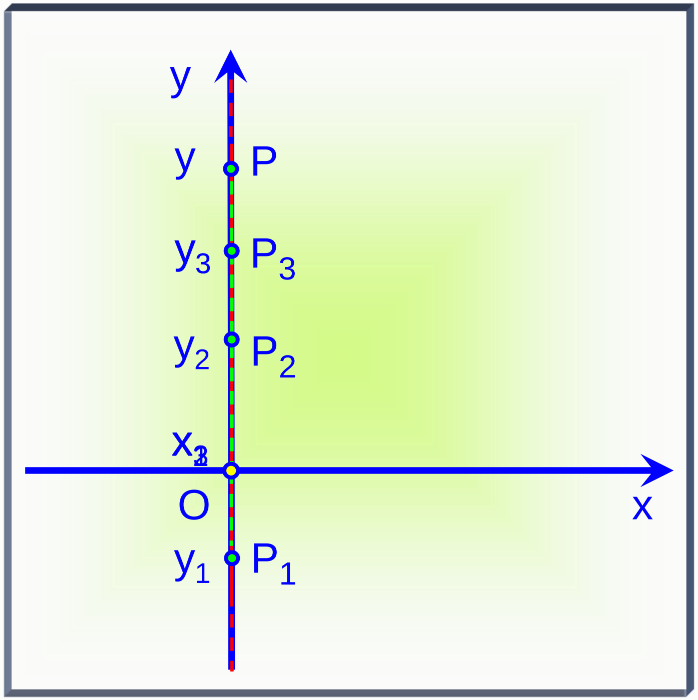
Tale situazione e' tradotta algebricamente nell' equazione : **x = 0**

Che è un caso particolare dell'equazione:

a x + b y + c = 0

in cui i coefficienti assumono i valori:

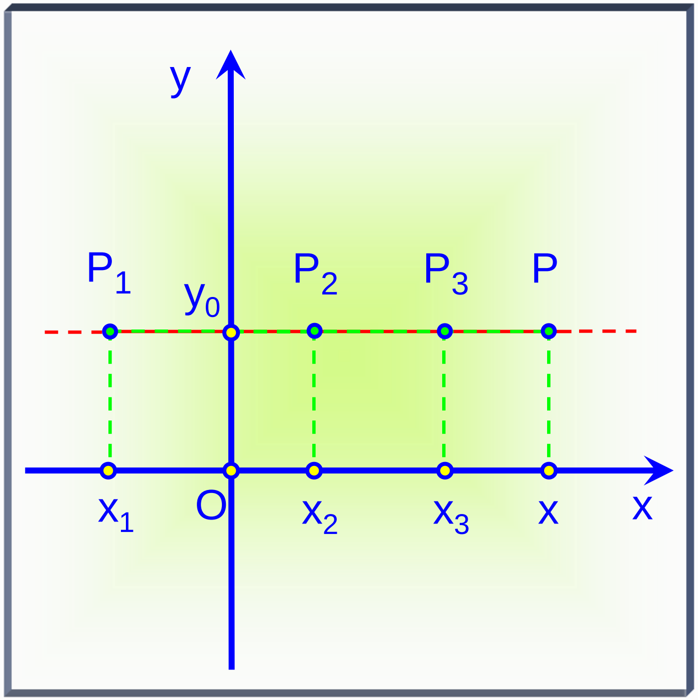
a = 1 ; b = 0 ; c = 0 .



rette particolari : retta parallela all'asse delle ordinate

terzo caso
retta parallela all'asse delle ascisse

con riferimento alla figura a lato, sia data la retta **r** parallela all'asse delle ascisse.



Si osservi che i punti della retta in questione (**… P_1 … … P2 … … P3 … P …**) sono tutti caratterizzati dall'avere lo stesso valore dell' ordinata (**y_0**) .

Tale situazione e' tradotta algebricamente nell' equazione : **$y = y_0$** Da cui **$y - y_0 = 0$**

Che è un caso particolare dell'equazione:

$a\,x + b\,y + c = 0$

in cui i coefficienti assumono i valori:

$a = 0$; $b = 1$; $c = -y_0$.

quarto caso
retta parallela all'asse delle ordinate

con riferimento alla figura a lato, sia data la retta **r** paralela all'asse delle ordinate.

Si osservi che i punti della retta in questione (**… P_1 … … P2 … … P3 … P …**) sono tutti caratterizzati dall'avere lo stesso valore dell'ascissa (**x_0**) .

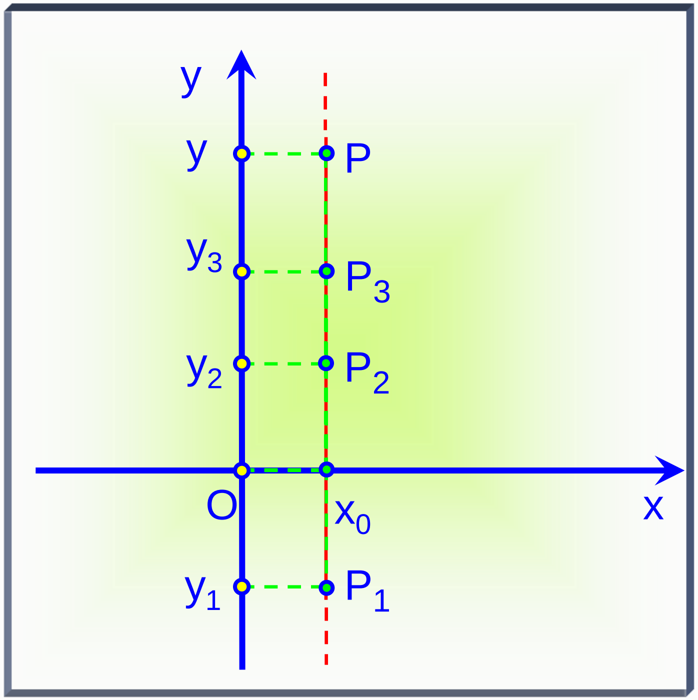
Tale situazione e' tradotta algebricamente nell' equazio-ne : **$x = x_0$** Da cui **$x - x_0 = 0$**

Che è un caso particolare dell'equazione:

$a\,x + b\,y + c = 0$

in cui i coefficienti assumono i valori:

$a = 1$; $b = 0$; $c = -x_0$.



rette particolari : retta parallela all'asse delle ordinate

quinto caso
Bisettrice del primo e del terzo quadrante

con riferimento alla figura a lato, sia data la retta **r** bisettrice del primo e del terzo quadrante.

Si osservi che ogni punto della retta in questione (.. P_1 .. .. P_2 … P_3 … P ..) è caratterizzato dall'avere lo stesso valore dell'ascissa e dell'ordinata ($x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, etc.)

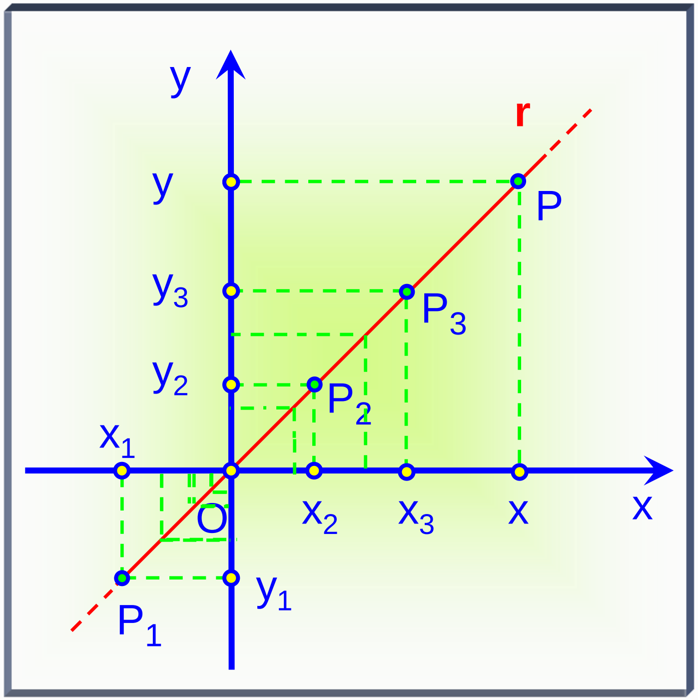
Tale situazione e' tradotta algebricamente nell' equazio-ne : **$x = y$** Da cui **$x - y = 0$**

Che è un caso particolare dell'equazione:

$a\,x + b\,y + c = 0$

in cui i coefficienti assumono i valori:

$a = 1$; $b = -1$; $c = 0$.



rette particolari : retta parallela all'asse delle ordinate

sesto caso
Bisettrice del secondo e del quarto quadrante

con riferimento alla figura a lato, si osservi che ciascun punto della retta in questione (.. P_1 .. , .. P_2 .. , .. P ...)

è caratterizzato dall'avere il valore dell'ascissa opposto a quello dell'ordinata (**$x_1 = - y_1$, $x_2 = - y_2$, ...**)

Tale situazione è tradotta algebricamente nell' equazio-ne : **$x = - y$** Da cui **$x + y = 0$**

Che è un caso particolare dell'equazione:

$a\,x + b\,y + c = 0$

in cui i coefficienti assumono i valori:

$a = 1$; $b = 1$; $c = 0$.