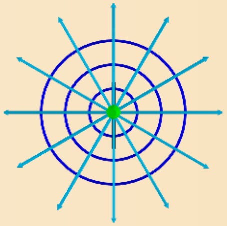
GEOMETRIA ANALITICA
introduzione



Corso multimediale di matematica

Prof. Calogero Contrino

Cenni storici: lo stato dell’arte alla fine del ‘500

Nella prima metà del XVI° secolo le scoperte geografiche ed il fiorire delle attività commerciali avevano evidenziato la necessità di uno sviluppo delle conoscenze matematiche fino ad allora possedute .

Prima conseguenza di questa esigenza fu la tendenza degli studiosi ad una rivisitazione delle opere degli antichi in tale ambito , in particolare le opere dei greci per ciò che concerne la geometria e quelle degli arabi per l’algebra .

Quest’ultima aveva avuto un notevole sviluppo soprattutto per merito del francese Viète il quale verso la fine del secolo l’aveva portata ad assumere forme abbastanza simili a quelle che noi conosciamo .

L’algebra tuttavia, anche se era impiegata con successo per risolvere in maniera spedita diversi problemi , presentava per gli studiosi dell’epoca parecchi punti oscuri .

Per converso , la geometria euclidea era reputata la scienza matematica per eccellenza , i suoi procedimernti per la risoluzione di problemi risultavano chiari ma spesso lunghi e faticosi

In questo contesto all’inizio del seicento i lavori quasi contemporanei,ma indipendenti , di due grandi francesi apportarono una rivoluzione nell’ambito delle conoscenze matematiche .

Cenni storici: Cartesio e Fermat

Renato Cartesio (Renè Descartes , 1596-1650) filosofo e matematico, pubblicò nel 1637 l’opera : Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences . Tale opera, passaggio importante per lo sviluppo del pensiero filosofico, presentava in appendice tre saggi che avevano lo scopo di dimostrare la validità del suo metodo di ricerca filosofico .

Il primo di questi saggi intitolato “ La geometrie “ era destinato ad apportare una rivoluzione nella matematica .

Con questa opera Cartesio effettua una sintesi tra algebra e geometria, fondando una nuova e potente disciplina per la soluzione dei problemi matematici : la geometria analitica .

Pierre de Fermat (1601-1665), di professione avvocato, fu un matematico dilettante (propabilmente il più grande di tutti i tempi) , si occupò di svariatissime questioni matematiche, intrattenendo rapporti con quasi tutti i grandi matematici del suo tempo,ma non pubblico in vita quasi nulla .

Nella sua opera postuma “ Ad locos planos et solidos isagoge “ affronta questioni simili a quelle affrontate da Cartesio nel secondo libro della geometria . Tali questioni, come si vedrà, sono di importanza fondamentale per lo sviluppo del metodo della geometria analitica.

Cartesio: il suo punto di vista sulle equazioni ad una incognita

Nel primo e terzo libro della geometria , Cartesio si occupa di come interpretare da un punto di vista geometrico le equazioni ad una incognita . Per capire il suo metodo si faccia riferimento al seguente esempio .

Si supponga l'esistenza di un problema geometrico nel quale un segmento di lunghezza incognita x compaia in una relazione del tipo di seguito illustrato dove b_1 e c_1 sono lunghezze (e perciò numeri positivi) note :

$x^2 = b_1x + c_1^2$ $\quad$ 1) $\quad$ (equazione di 2° grado)

Volendo risalire al legame tra i coefficienti di questa equazione e quelli della forma canonica studiata in algebra nell'ipotesi che il coefficiente del termine di secondo grado sia pari ad uno :

$x^2 + bx + c = 0$ $\quad$ 2)

si ha :

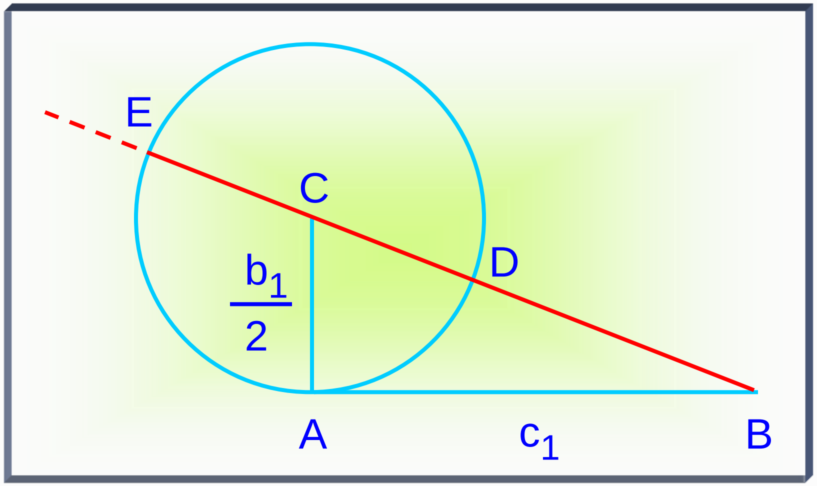
$b = -b_1 \quad \wedge \quad c = -c_1^2$ $\quad$ 3)

Cartesio: il suo punto di vista sulle equazioni ad una incognita

Vediamo come Cartesio costruisce geometricamente la soluzione positiva dell'equazione 1):

$$x^2 = b_1 x + c_1^2$$

- si disegni il segmento AB di lunghezza c_1 ;
- si costruisca il segmento AC perpendicolare ad AB e di lunghezza $\frac{b_1}{2}$;
- si costruisca la circonferenza di centro C e di raggio AC ;
- si tracci la semiretta per B e C che interseca la circonferenza nei punti D ed E .



la misura del segmento BE = BC + EC , rappresenta la soluzione del problema , infatti :

$BC = \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + c_1^2}$ (per il terorema di Pitagora) e $CE = \frac{b_1}{2}$ (per costruzione)

Per cui $BE = BC + CE = \frac{b_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + c_1^2}$

Che è appunto la soluzione positiva dell' equazione di 2° grado assegnata

Cartesio: il suo punto di vista sulle equazioni ad una incognita

Per verificare la precedente affermazione si riduca l'equazione 1) alla sua forma canonica :

$$x^2 = b_1 x + c_1^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - b_1 x - c_1^2 = 0 \qquad \boxed{4)}$$

Confrontando quest' ultima con la 2) che esprime la forma canonica generica nel caso in cui il coefficiente del termine di secondo grado vale 1 :

$$x^2 + bx + c = 0$$

Si deducono ,come si è visto in precedenza, le relazioni 3) tra i corrispondenti coefficienti :

$$b = -b_1 \quad \wedge \quad c = -c_1^2$$

Applicando la nota formula risolutiva ridotta studiata in algebra alla equazione 2) :

$$x_{1-2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

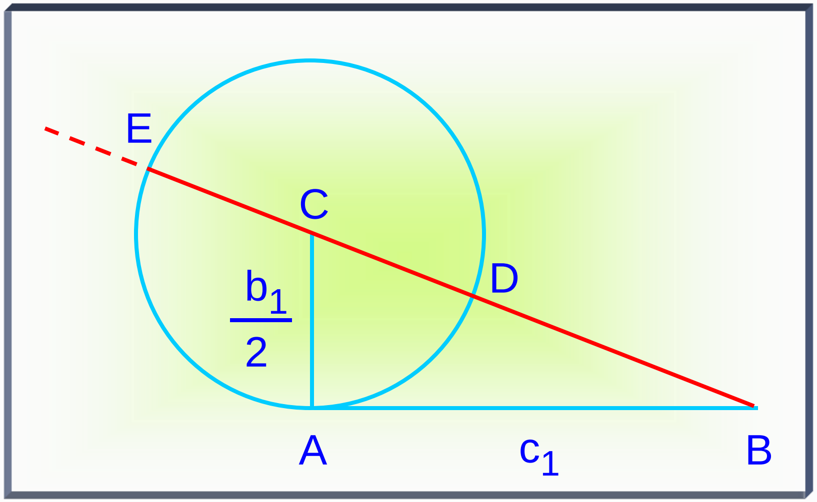
Sostituendo secondo le relazioni 3) si ha :

$$x_1 = BE = \frac{b_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + c_1^2}$$

Che è appunto il valore determinato da Cartesio con la costruzione geometrica vista prima .

Cartesio: il suo punto di vista sulle equazioni ad una incognita

Si noti che con la costruzione precedente sarebbe stato possibile determinare la soluzione negativa, ma Cartesio la considerava falsa appunto perché negativa (i valori negativi non erano accettati all'epoca perché non se ne comprendeva il significato).Considerando ancora la costruzione precedente infatti si ha :



$BD = BC - CD$ e quindi :

$$BD = \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + c_1^2} - \frac{b_1}{2} > 0$$

Da cui cambiando di segno si ha :

$$-BD = \frac{b_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + c_1^2} < 0$$

Ricordando che la seconda soluzione dell' equazione espressa con la formula ridotta è :

$$x_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Operando le sostituzioni viste prima si ha :

$$x_2 = \frac{b_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + c_1^2} = -BD = -\left(\sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + c_1^2} - \frac{b_1}{2}\right) < 0$$

Cartesio: il suo punto di vista sulle equazioni ad una incognita

Nell' esempio visto prima è evidente l'intento di Cartesio di dare un'interpretazione geometrica alle operazioni algebriche (fare chiarezza sulle operazioni algebriche).

Ma c'è un altro obiettivo che emerge chiaramente nella sua opera : sostituire le complicate costruzioni di figure geometriche (la cui precisione è accertata con prolissi ragionamenti di tipo deduttivo) con operazioni di calcolo algebrico.

Come risulta dall'esempio, seppure Cartesio operi con forte spirito innovatore , i metodi che propone sono formalmente molto distanti dai procedimenti usati in geometria analitica al tempo d' oggi .

Cartesio: la risoluzione dei problemi indeterminati

Nel secondo libro della “Geometrie “ Cartesio apre una parentesi su tematiche più vicine a quelle trattate attualmente della geometria analitica.

Affronta il tema della risoluzione dei cosiddetti problemi indeterminati, cioe’ problemi il cui modello algebrico e’ un’ **equazione a due incognite**.

Prima di Cartesio questo tipo di problemi non era ritenuto interessante perché si pensava che si poteva trovare il valore di una delle incognite solo se era conosciuta l’altra per una qualche via .

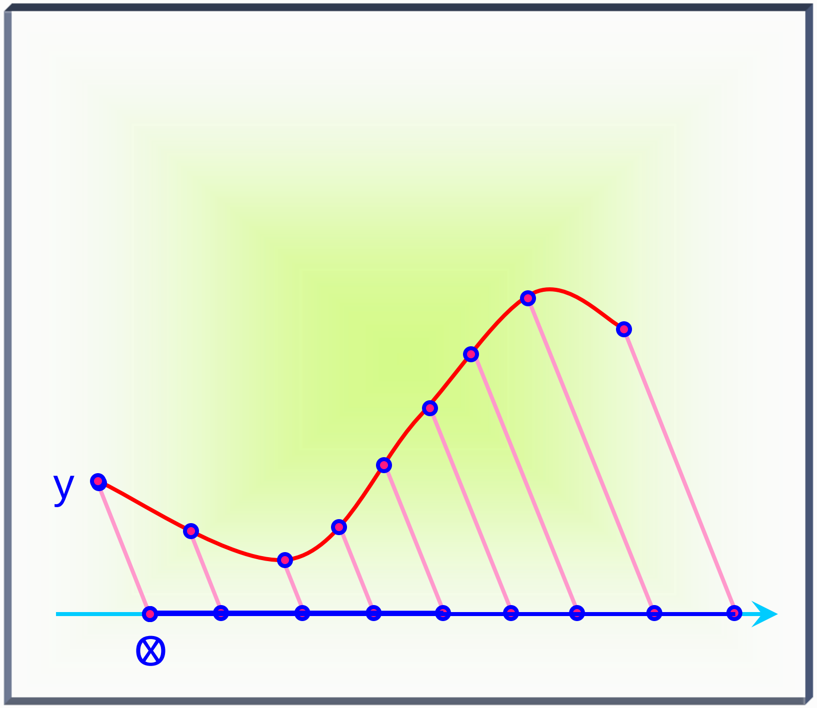
Cartesio inquadra questi problemi da un punto di vista completamente innovativo

Cartesio: la risoluzione dei problemi indeterminati

Egli considera una delle due incognite (x) come la misura di una lunghezza (solo valori positivi) variabile con continuità lungo una direzione assegnata (retta).

Volendo semplificare , se l'equazione è tale che assegna un sol valore all'altra incognita (y), allora per ogni valore di x vi e' un solo valore di y, tale valore viene interpretato come una lunghezza su un'altra retta che incide la prima.

Pertanto le lunghezze di x e y individuano un punto che al loro variare descrive una curva che giace sul piano individuato dalle due rette .



In definitiva in questo modo ogni equazione in due incognite genera una curva i cui punti sono determinati da coppie di numeri (x,y) , x e y prendono il nome di coordinate.

Cartesio: la risoluzione dei problemi indeterminati

Ma anche nel secondo libro della “Geometrie” Cartesio, pur affrontando tematiche più pertinenti alla geometria analitica così come e’ codificata oggi , se ne mantiene piuttosto distante per gli aspetti formali e non arriva a comprendere pienamente diverse implicazioni del nuovo metodo che ha inventato, pur avendo la grande consapevolezza della rivoluzione introdotta .

In tutta l’opera, l’allontanano dall’esposizione moderna ,in particolare ,alcuni aspetti :

- Non usa coordinate ortogonali ,ma fa uso di coordinate oblique .
- Non espone in modo dichiarato e generale (non li esprime con formule) alcuni concetti preliminari quali quello di punto di divisione, di distanza ,di inclinazione etc.
- Non traccia nessuna curva a partire dalla sua equazione
- Non comprende il significato delle coordinate negative
- Non comprende fino in fondo l’importanza dei problemi indeterminati che vengono affrontati solo di sfuggita nel secondo libro .

Il punto di vista di Fermat :

Fermat arrivò probabilmente prima di Cartesio al principio fondamentale della geometria analitica ,infatti già un anno prima della pubblicazione della Geometrie di Cartesio aveva formulato il seguente enunciato :

Ogniqualvolta in un'equazione finale compaiono due quantità incognite si ha un luogo (geometrico), l'estremità dell'una descrivendo una linea retta o una linea curva.

Fermat comprende più di Cartesio l'importanza di tale principio ed incomincia a ricercare le soluzioni di equazioni indeterminate (nelle situazioni più semplici) invece di impegnarsi nell'interpretazione geometrica di equazioni algebriche determinate (ad una sola incognita) .

Prendendo le mosse da tali premesse Fermat ottiene l' equazione della retta e di altri luoghi (circonferenza ,parabola ed iperbole).

Qui si ricorda la sua formulazione dell'equazione della retta (dove usa il simbolismo introdotto in algebra da Viète) : **D in A aequetur B in E** equivalente al moderno **Dx=By**

Un altro risultato importante raggiunto da Fermat è un metodo per tracciare rette tangenti (o normali) ad un punto qualsiasi di una curva piana di cui si conosca l'equazione .

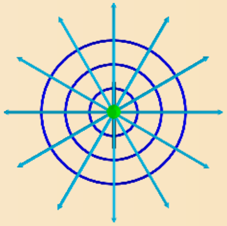
Tale risultato era stato ottenuto anche da Cartesio , ma con procedimento molto più complicato .

Concetti fondamentali

Dopo questo breve excursus storico , si porgono nel seguito le basi per un'introduzione alla moderna geometria analitica .

Inizialmente sarà necessario fare riferimento ad alcuni concetti di geometria euclidea acquisiti nel corso del biennio .

GEOMETRIA ANALITICA
concetti fondamentali



Corso multimediale di matematica

Prof. Calogero Contrino

Richiamo :assioma della distanza euclidea

Assioma della distanza euclidea

Ad ogni coppia di punti del piano si può associare un numero reale positivo ***d*** detto distanza **(assoluta o euclidea)** tale che:

a. per ogni coppia di punti A, B si ha : $d(A,B) = d(B,A)$

b. per ogni terna di punti A,B,C, si ha: $d(A,B) \leq d(B,C) + d(C,A)$

NOTA : nella condizione b la disuguaglianza ha come modello il caso di punti non allineati, mentre l'uguaglianza ha come modello il caso di punti allineati con C compreso tra A e B .

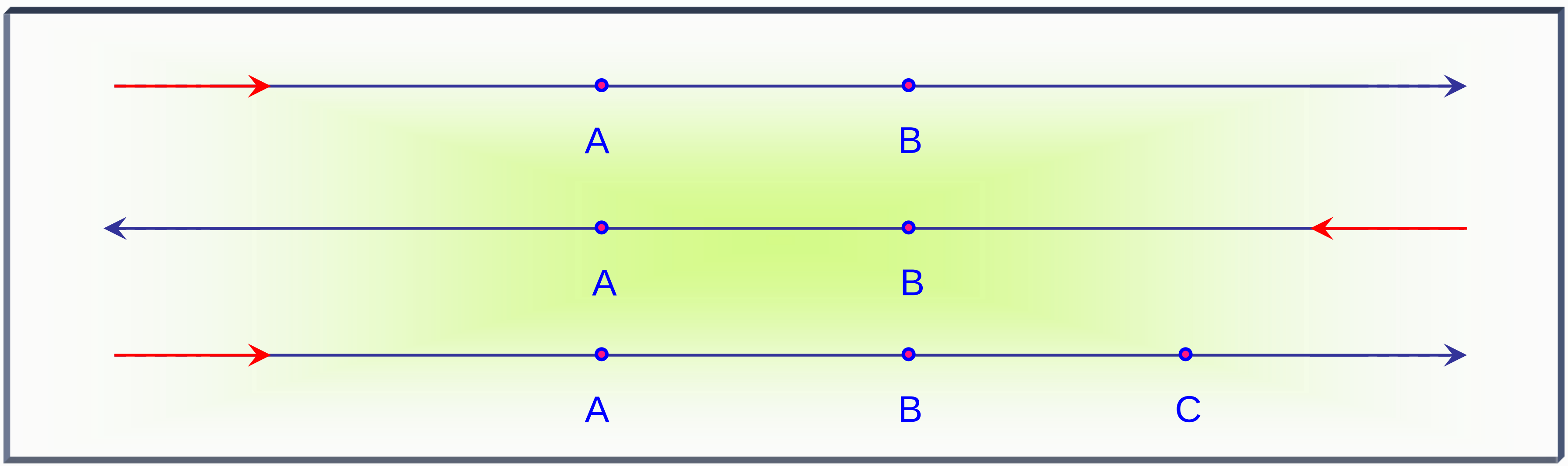
Richiamo : assioma dell'ordine

Assioma dell'ordine

I punti di una retta si possono ordinare in modo tale che:

a. Dati due punti distinti A, B si ha : o A precede B o B precede A

b. Dati tre punti distinti A, B ,C , se A precede B e B precede C allora A precede C



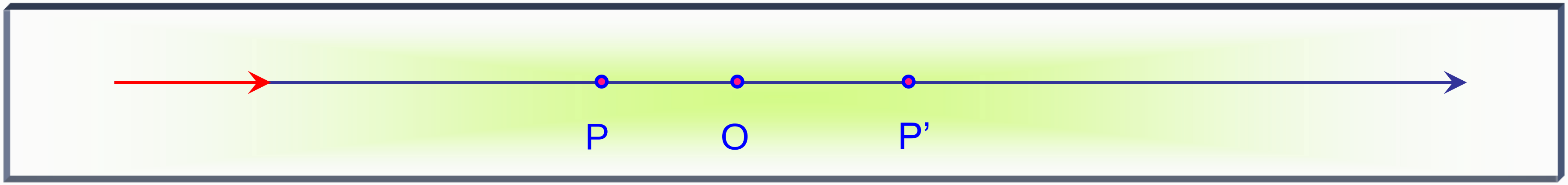
Retta orientata

Il postulato dell'ordine determina una duplice possibilità di ordinamento dei punti di una retta, fissata una delle due possibilita' di ordinamento si dira' che ***la retta e' orientata*** **.**

A tal proposito, scelto un punto O ad arbitrio ,chiamato **punto origine** o semplicemente **origine** , si noti che tale punto divide la retta in due semirette :

la semiretta che contiene i punti che precedono O nell'orientamento fissato si dice semiretta negativa ;

la semiretta che contiene i punti che seguono O nell'orientamento fissato si dice semiretta positiva **.**



Richiamo : segmenti orientati

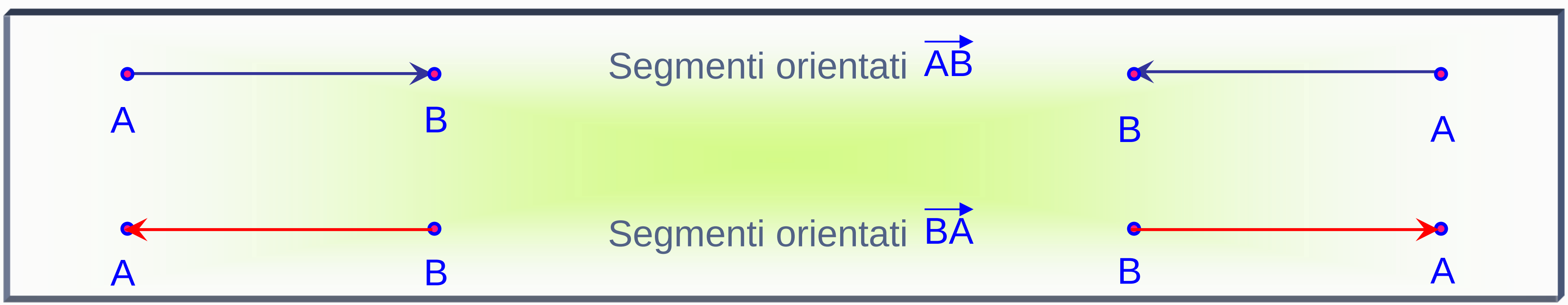
Segmenti orientati

Anche un segmento , essendo un sottoinsieme di una retta, può essere pensato come un insieme ordinato di punti e quindi anche su di esso si possono fissare ad arbitrio due versi di percorrenza .

Pertanto un segmento di estremi A e B si dira' orientato da A a B e si indicherà con il simbolo $\overrightarrow{AB}$ quando l'ordinamento fissato fa incontrare i punti del segmento procedendo da A a B.

Un segmento di estremi A e B si dira' orientato da B a A e si indicherà con il simbolo $\overrightarrow{BA}$ quando l'ordinamento fissato fa incontrare i punti del segmento procedendo da **B** a **A**.

I segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ si dicono opposti

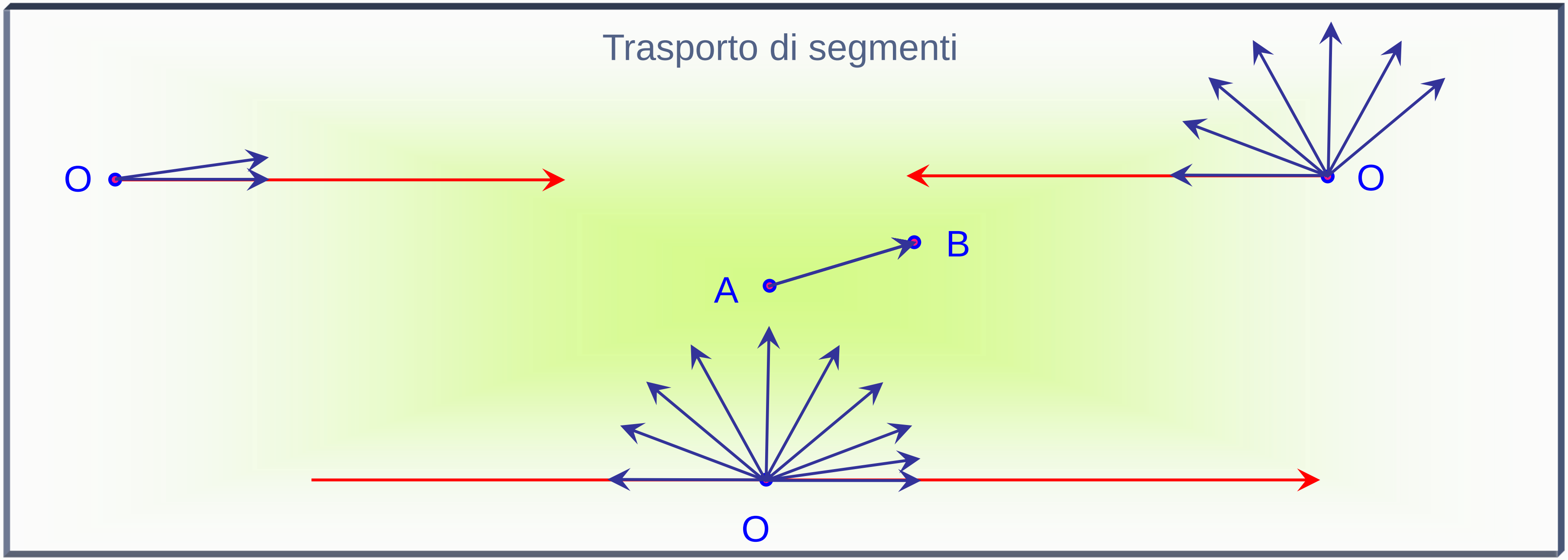


Richiamo : assioma del trasporto dei segmenti

Assioma del trasporto dei segmenti

Dati una semiretta con origine nel punto O ed un segmento $\overrightarrow{AB}$,sulla semiretta esiste un segmento e uno solo con origine in O e congruente al segmento dato .

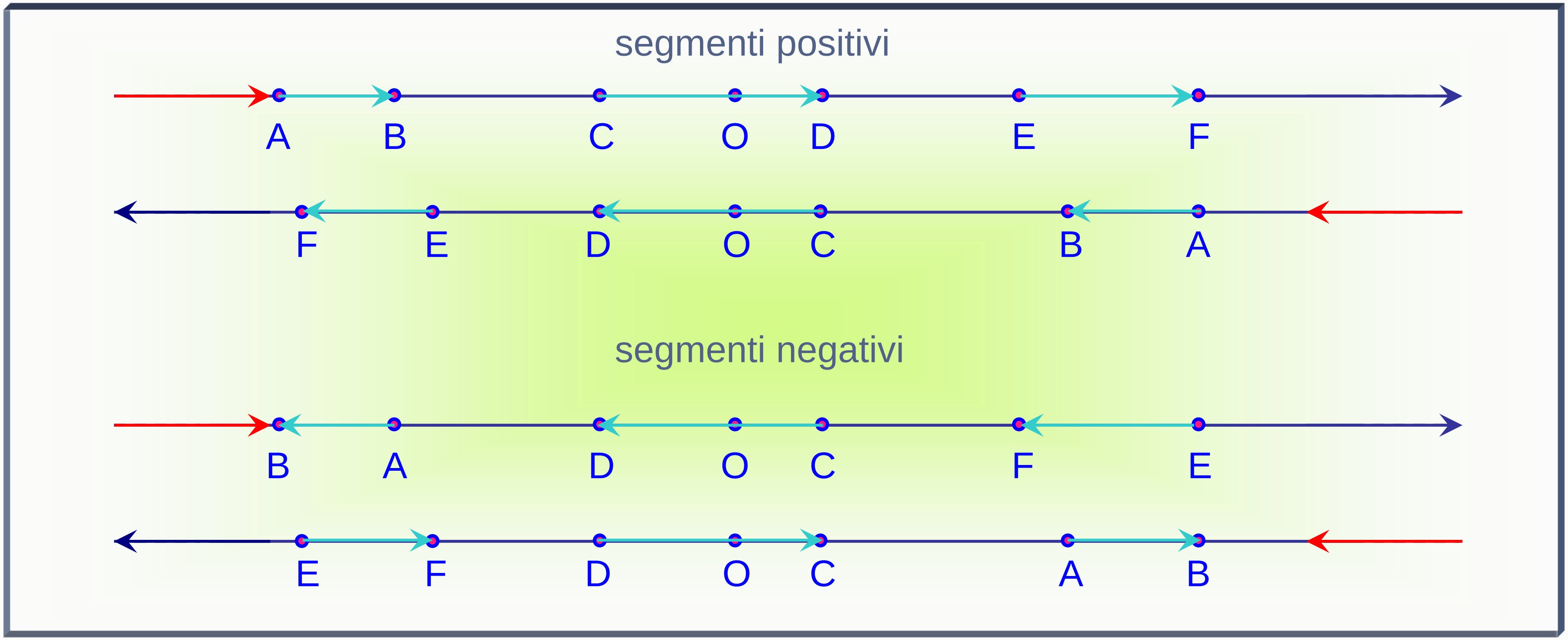
Dal precedente assioma consegue che su una retta, dato un qualunque punto O di essa, esistono solo e soltanto due segmenti con origine in O e congruenti ad un segmento assegnato.



Richiamo : segmenti orientati su una retta orientata

Dal postulato del trasporto discende che un qualsiasi segmento orientato, essendo congruente (perfettamente sovrapponibile) ad un segmento giacente su una qualsiasi retta , può essere confrontato con l'orientamento di essa .

Pertanto un segmento orientato si dice positivo o negativo a seconda che il suo orientamento (verso) sia coincidente con quello fissato sulla retta o meno .



Sistema di ascisse su una retta orientata

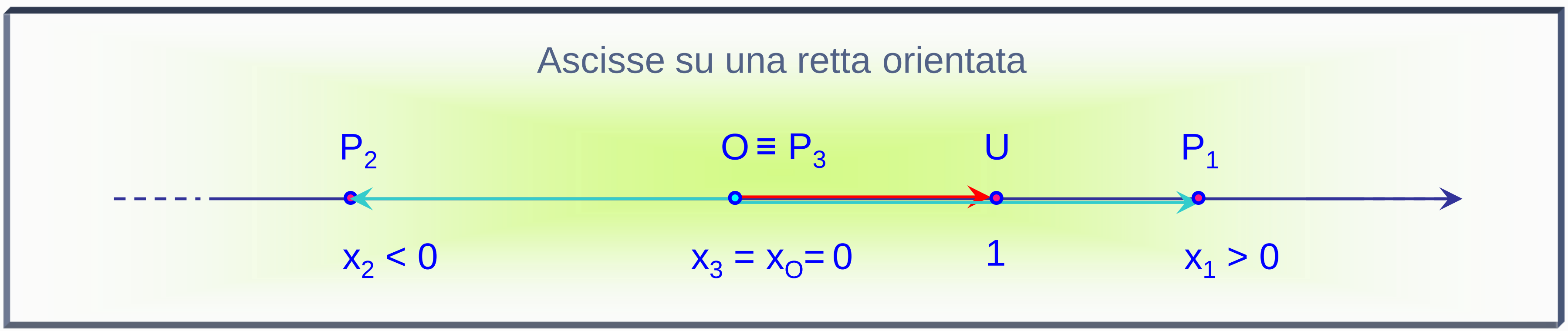
Con riferimento alla figura sia data una retta orientata **r** su cui e' fissato un punto origine O.

Si fissi su **r** un' unita' di misura **u** in modo tale che **u** sia la misura unitaria di un segmento orientato $\overrightarrow{OU}$ con U punto ricadente sulla semiretta positiva (in simboli : **u** = mis $\overrightarrow{OU}$ = OU) ;

Definizione

Considerato un punto P sulla retta ***r*** , si dice ascissa del punto P sulla retta ***r*** il numero reale x (negativo, positivo o nullo) che esprime (nell'unita' di misura scelta) la misura del segmento orientato $\overrightarrow{OP}$: x = OP/OU

(tale rapporto sara' positivo o negativo a seconda che $\overrightarrow{OP}$ abbia lo stesso orientamento od orientamento opposto ad $\overrightarrow{OU}$; se P coincide con O tale rapporto sara' nullo) ***.***



Distanza relativa tra due punti su una retta

Problema

Assegnati due punti A e B su una retta orientata **r**, stabilito un sistema di ascisse, esprimere la distanza relativa tra i punti A e B , estremi del segmento orientato $\overrightarrow{AB}$(**misura con segno o misura algebrica o lunghezza algebrica** AB del segmento orientato $\overrightarrow{AB}$) mediante le ascisse x_A e x_B dei due punti estremi del segmento.

Essendo **u** l' unità di misura nel sistema di ascisse fissato sulla retta ***r***, considerato il segmento di estremi A e B, la sua misura AB sara' data dal numero reale $x = AB/OU$ *(* tale rapporto sarà positivo o negativo a seconda che $\overrightarrow{AB}$ abbia lo stesso orientamento od orientamento opposto ad $\overrightarrow{OU}$; sarà nullo se A coincide con B) *.*

Il problema richiede di mettere in relazione il numero x con i numeri $x_A = OA$ ed $x_B = OB$

Distanza relativa tra due punti su una retta

risoluzione

Con riferimento alla figura a lato, fissata l'origine O del sistema di ascisse si ha :

$x_B = OB/OU = OB$; $x_A = OA/OU = OA$ 1)

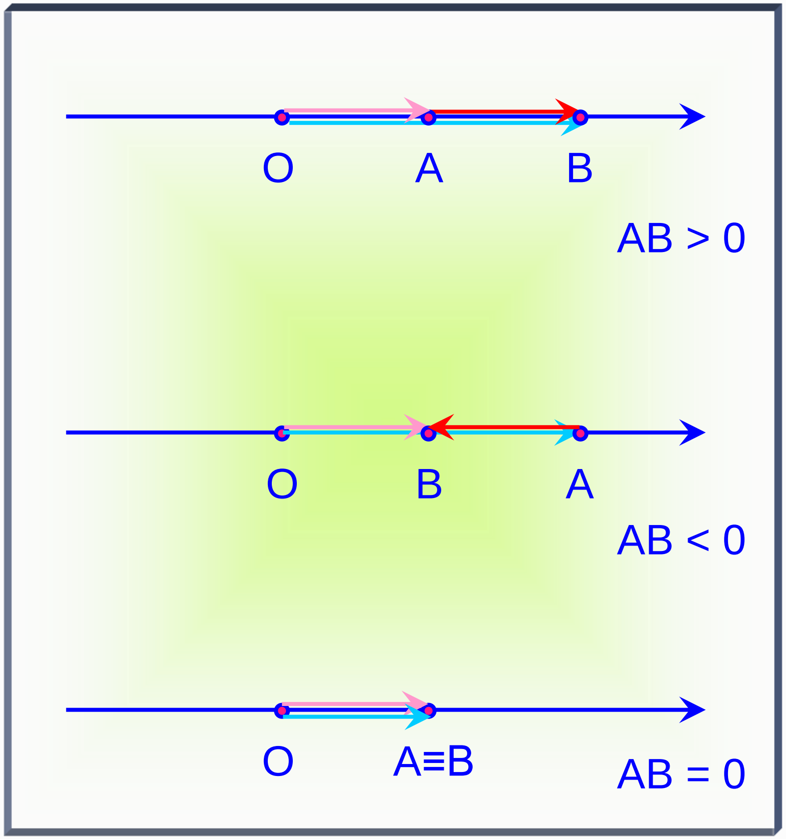
Ma si ha anche (somma di segmenti) :

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

Da cui : OB = OA + AB e quindi : AB = OB - OA

Ed infine per le 1) : $AB = OB – OA = x_B - x_A$

Il numero $AB = x_B – x_A$ è positivo ,negativo o nullo a seconda che A precede B, segue B o coincide con B



Teorema di Chasles

Per quanto visto prima, naturalmente si ha che AB = - BA ovvero AB + BA = 0 . Si puo' pertanto enunciare il seguente :

teorema

(relazione o identità di Chasles)

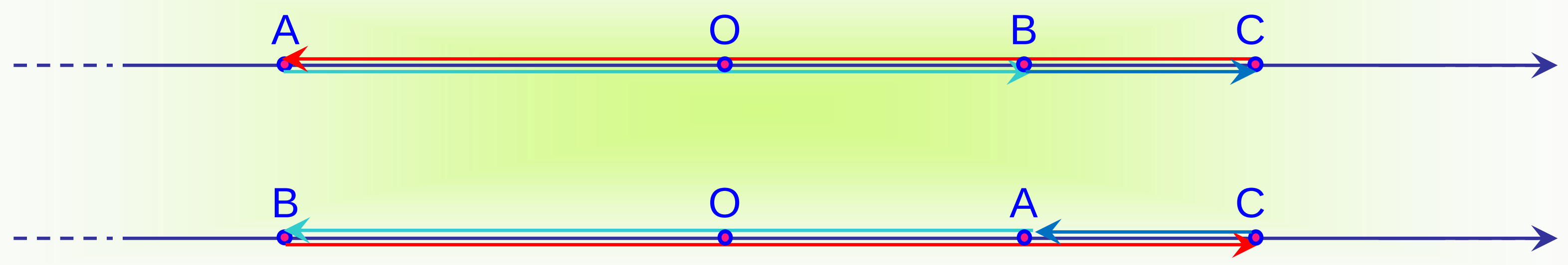
Assegnati tre punti A , B , C di ascisse ripettivamente x_A , x_B e x_C disposti comunque su una retta orientata ***r***, si ha la seguente relazione : AB+ BC = AC ovvero AB+BC+CA = 0

dimostrazione

essendo : $AB = x_B - x_A$; $BC = x_C - x_B$; $CA = x_A - x_C$; si puo' scrivere :

$AB+BC+CA = (x_B - x_A) + (x_C - x_B) + (x_A - x_C) = x_B - x_A + x_C - x_B + x_A - x_C = 0$ Q.E.D

esempi



Distanza euclidea espressa mediante ascisse

Come ricordato in precedenza , la distanza euclidea è data da un numero positivo, pertanto per poterla esprimere mediante il numero $x_B - x_A$, dovra' essere considerato il suo valore assoluto, si avra' cioè :

$$d(AB) = d(BA) = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$$

Nota : la distanza euclidea o distanza assoluta tra due punti potra' essere nel seguito così indicata in simboli :

$$d(AB) = d(BA) = \overline{AB} = \overline{BA}$$

punto medio di un segmento su una retta

Ci si pone ora il seguente

Problema

determinare l'ascissa del punto medio di un segmento che giace su una retta note le ascisse degli estremi del segmento assegnato.

Con riferimento alla figura, sia data una retta orientata sulla quale sia fissato un sistema di ascisse.

Su tale retta sia M il punto medio del segmento AB . Si ha pertanto : AM = MB 1)

Dette x_M , x_A , x_B le ascisse dei punti M, A, B, per la 1) si ha successivamente:

$$x_M - x_A = x_B - x_M \quad \Rightarrow \quad 2x_M = x_A + x_B \quad \Rightarrow \quad x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad 2)$$

La 2) è la relazione cercata .

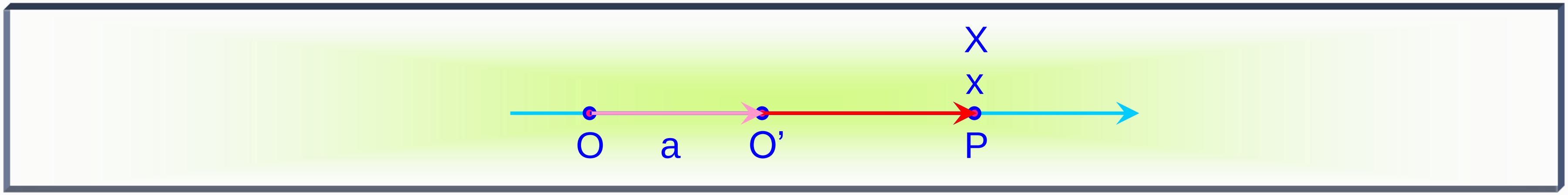
traslazione del sistema di riferimento su una retta

Si consideri il seguente

Problema

Fissati su una retta due diversi riferimenti tali che abbiano lo stesso orientamento, la stessa unita' di misura ma origini diverse O e O' , determinare le relazioni che intercorrono tra le ascisse di un generico punto rispetto ai due diversi riferimenti .

Con riferimento alla figura, sia data una retta orientata sulla quale sia fissato un sistema di ascisse con origine in O.



sia P il generico punto che abbia ascissa x nel riferimento con origine in O .

Si consideri un nuovo sistema di riferimento con origine in O' e sia X l'ascissa del punto P nel nuovo sistema di riferimento . Si ha : $OP = OO' + O'P$ da cui , ponendo $OO' = a$

si ottiene : $x = a + X$ $\wedge$ $X = x - a$ Che sono le relazioni cercate .