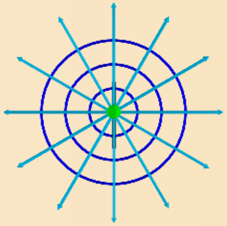
GEOMETRIA ANALITICA
Il piano cartesiano



Corso multimediale di matematica

Prof. Calogero Contrino

Piano cartesiano

Su un piano, si considerino due rette incidenti x,y sulle quali siano fissati due sistemi di ascisse.

Si trasli una delle rette od ambedue in modo da far coincidere i punti origine O ed O' .

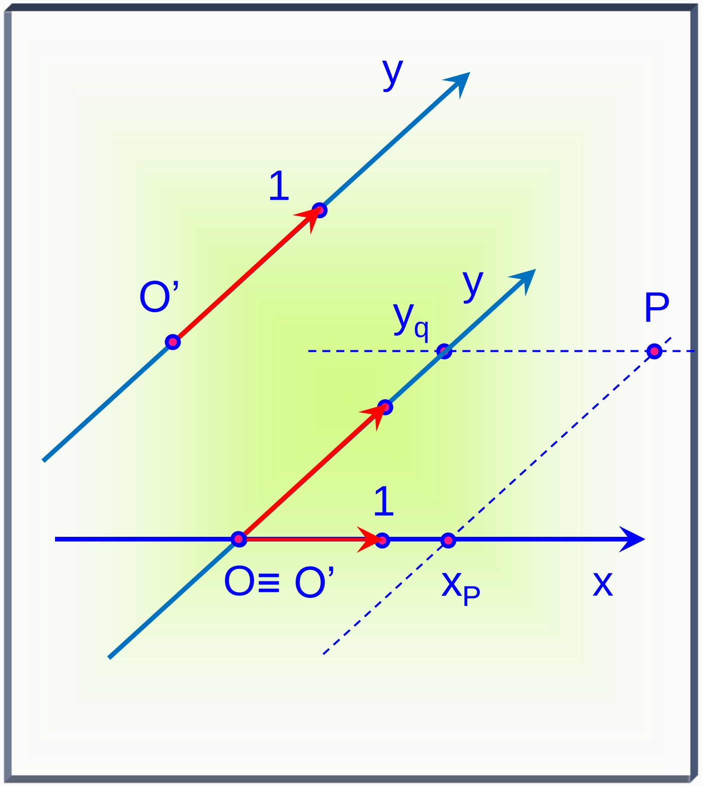
Da un punto di ascissa x_P sulla retta x si tracci la parallela alla retta y .

Analogamente da un punto di ascissa y_P sulla retta y si tracci la parallela alla retta x .

Le due rette si intersecano in un punto P del piano che è univocamente determinato dai valori di x_P ed y_P .

Tale costruzione puo' essere effettuata per qualsiasi valore di di x_P ed y_P .

Si è in questo modo creata una corrispondenza biunivoca tra la coppia ordinata (x_p, y_P) ed il punto P .



Le rette x e y prendono il nome di assi coordinati (rispettivamante asse delle **ascisse** ed asse delle **ordinate**) dimetrici (unita' di misura diverse) mentre i valori x_P, y_P prendono il nome di coordinate (rispettivamente **ascissa** ed **ordinata**) del punto P .

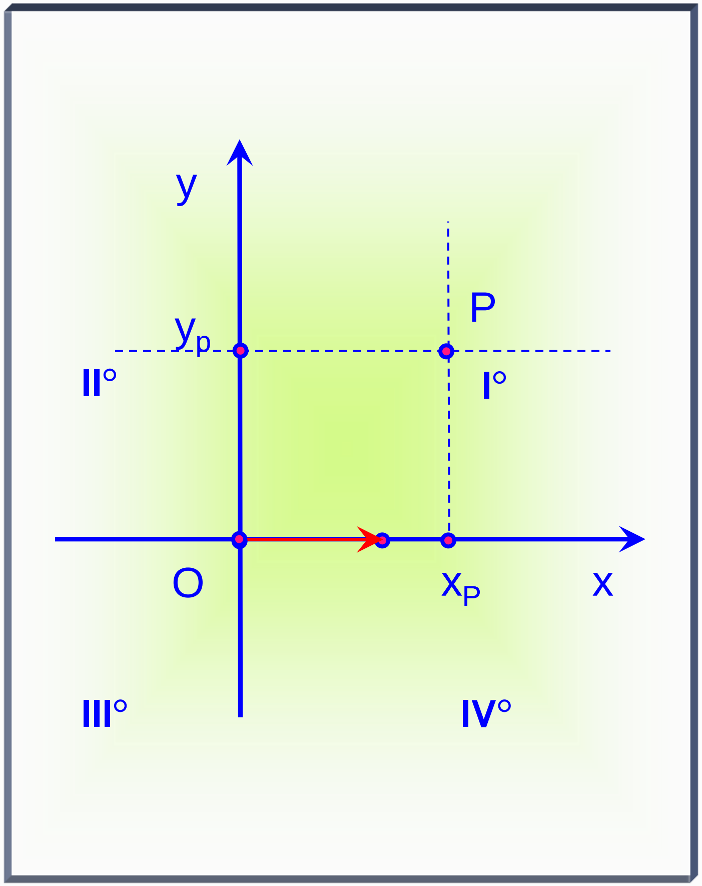
Piano cartesiano ortogonale monometrico

In generale si preferisce scegliere assi coordinati ortogonali e monometrici (con la stessa unità di misura su x e y).

I due assi coordinati dividono il piano in quattro quadranti .

I quadranti prendono il nome rispettivamente di primo(I°) , secondo(II°), terzo(III°), quarto(IV°), in concordanza con la sequenza con la quale essi vengono spazzati da una semiretta che, inizialmente sovrapposta al semiasse positivo delle ascisse, ruoti in senso antiorario attorno all'origine.

Pertanto le coordinate del punto P saranno diversamente caratterizzate secondo che il punto ricada internamente ad un determinato quadrante oppure si trovi sugli assi che sono le frontiere di ciascun quadrante .



Piano cartesiano

Nella figura a lato sono esaminate le diverse situazioni che si possono verificare .

Punto P nell'origine degli assi: $x_P = 0$; $y_P = 0$.

Punto P sul semiasse positivo delle ascisse: $x_P > 0$; $y_P = 0$.

Punto P interno al primo quadrante : $x_P > 0$; $y_P > 0$.

Punto P sul semiasse positivo delle ordinate : $x_P = 0$; $y_P > 0$.

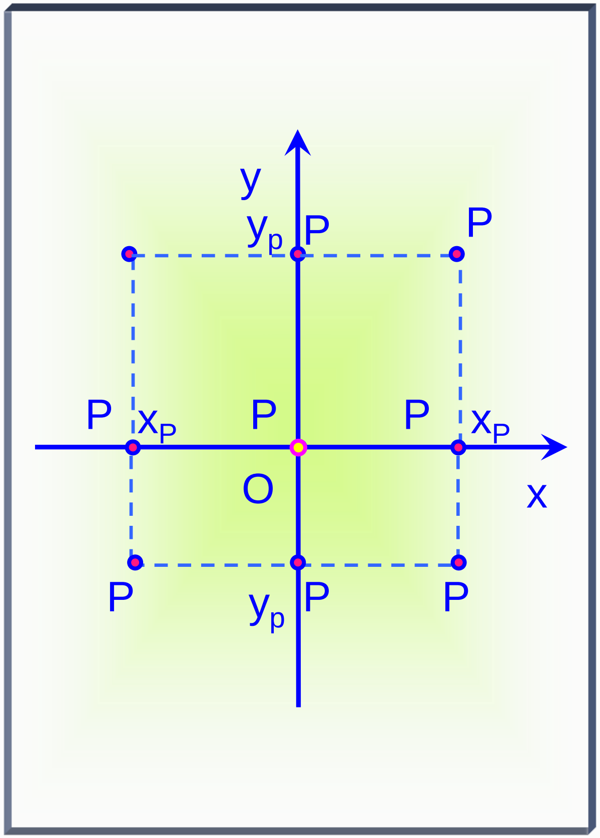
Punto P interno al secondo quadrante : $x_P < 0$; $y_P > 0$.

Punto P sul semiasse negativo delle ascisse: $x_P < 0$; $y_P = 0$.

Punto P interno al terzo quadrante : $x_P < 0$; $y_P < 0$.

Punto P sul semiasse negativo delle ordinate: $x_P = 0$; $y_P < 0$.

Punto P interno al quarto quadrante : $x_P > 0$; $y_P < 0$.

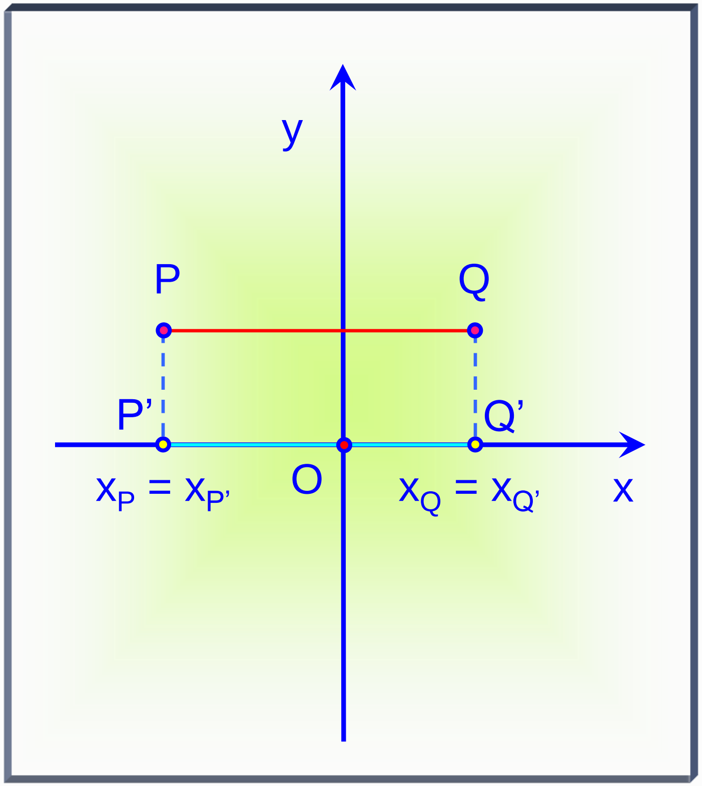


Distanza tra due punti sul piano cartesiano

Ci si chiede a questo punto in che modo sia possibile esprimere la distanza euclidea tra due punti del piano cartesiano .

In si possono determinare diverse situazioni .

Con riferimento alla figura a lato si consideri dapprima il caso in cui i due punti **P**, **Q** individuano gli estremi di un segmento parallelo all'asse delle **x.**



Siano **P'** e **Q'** le proiezioni sull'asse delle ascisse dei punti **P** e **Q**, essendo **PQ ≅ P'Q'** e $x_P = x_{P'}$; $x_Q = x_{Q'}$,

la distanza è così esprimibile:

$$d(PQ) = d(QP) = | x_Q - x_P | = | x_P - x_Q |$$

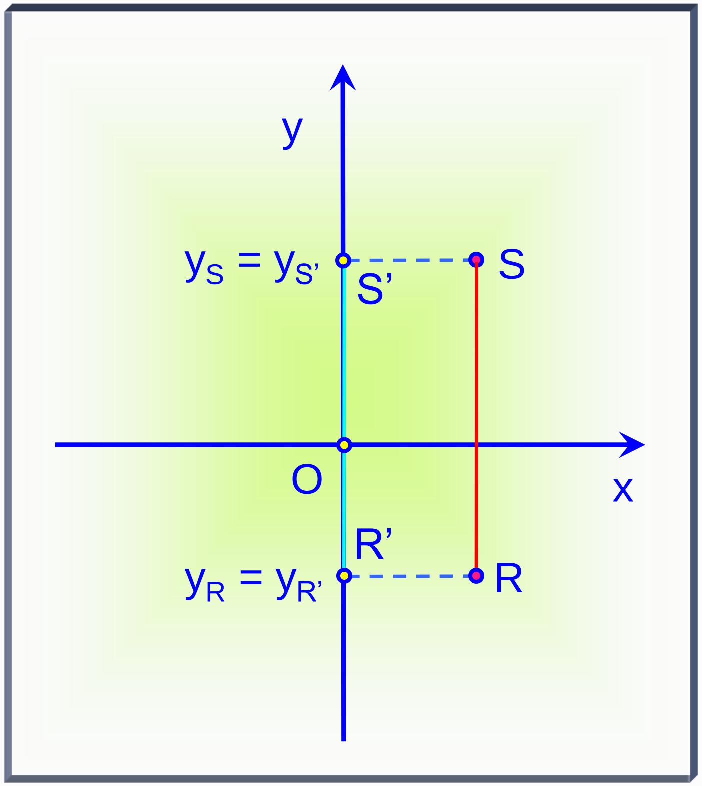
Distanza tra due punti sul piano cartesiano

Si consideri ora il caso in cui i due punti **R, S** individuano gli estremi di un segmento parallelo all'asse delle **y**.

Siano **R'** e **S'** le proiezioni sull'asse delle ordinate dei punti **R** e **S** , essendo **RS ≅ R'S'** e $y_R = y_{R'}$; $y_S = y_{S'}$,

la distanza è così esprimibile :

$$d(RS) = d(SR) = |\, y_S - y_R \,| = |\, y_R - y_S \,|$$



Distanza tra due punti sul piano cartesiano

Si esamina ora il caso in cui i due punti **P, Q** individuano gli estremi di un segmento non parallelo a nessuno degli assi coordinati .

Per i punti P e Q ,si conducano le parallele agli assi coordinati .

Sia H il punto d'intersezione tra l'orizzontale per P e la verticale per Q e si consideri il triangolo PHQ.

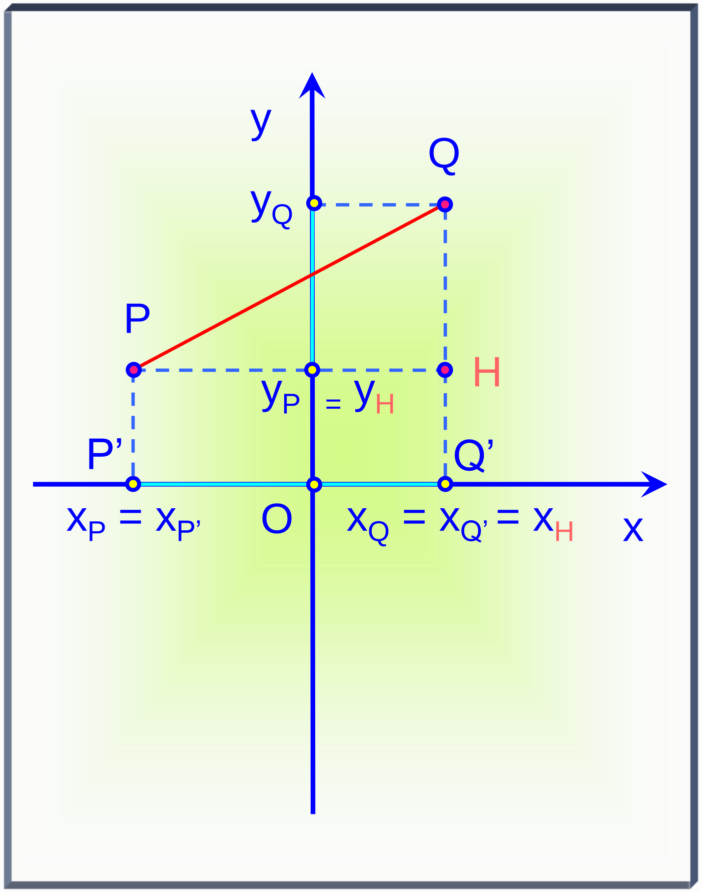
Essendo i segmenti PH e HQ paralleli rispettivamente all'asse x ed all'asse y si ha:

$$d(PH) = d(HP) = | x_H - x_P | = | x_P - x_H |$$

$$d(HQ) = d(QH) = | y_Q - y_H | = | y_H - y_Q |$$

Ed infine per il teorema di pitagora :

$$d(PQ) = d(QP) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

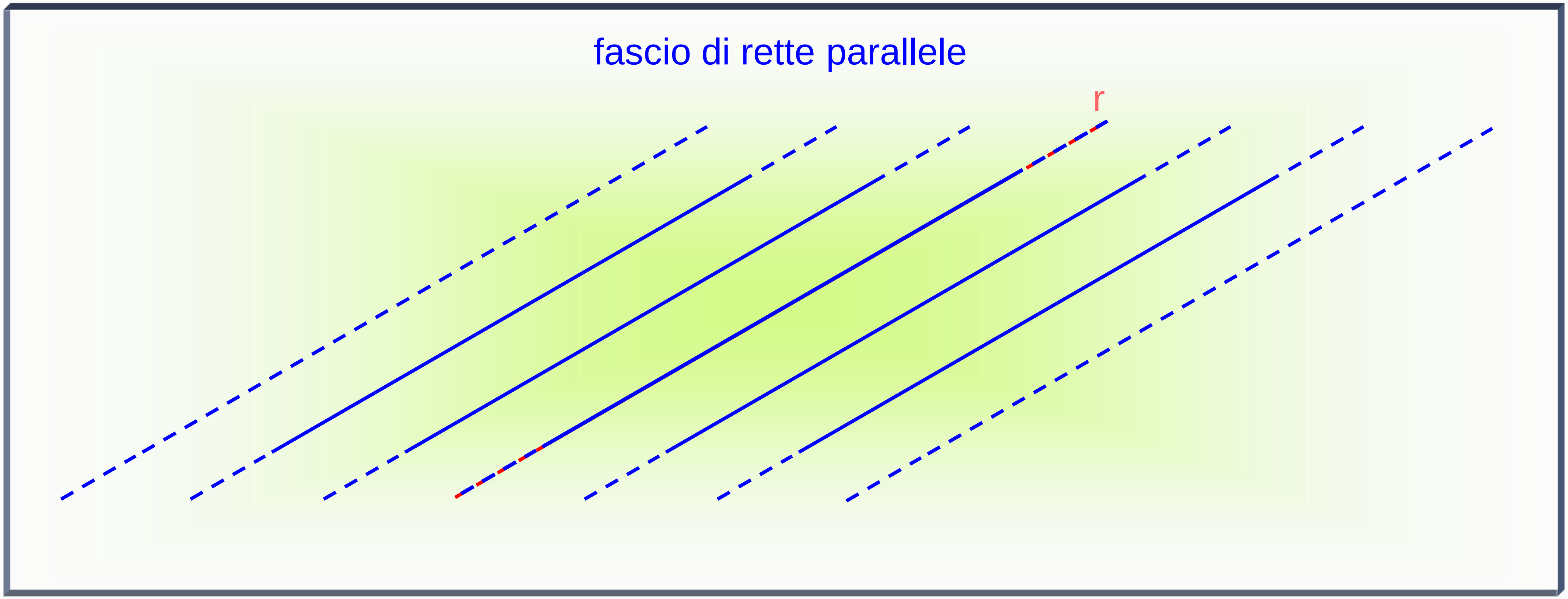


Richiami di geometria euclidea : fascio improprio di rette

E' opportuno a questo punto richiamare qualche conoscenza di geometria euclidea acquisita nel corso del biennio . Si ricordi la seguente

definizione

Si dice **fascio improprio di rette** (fascio di rette parallele) l'insieme delle rette giacenti su un piano parallele ad una retta assegnata.



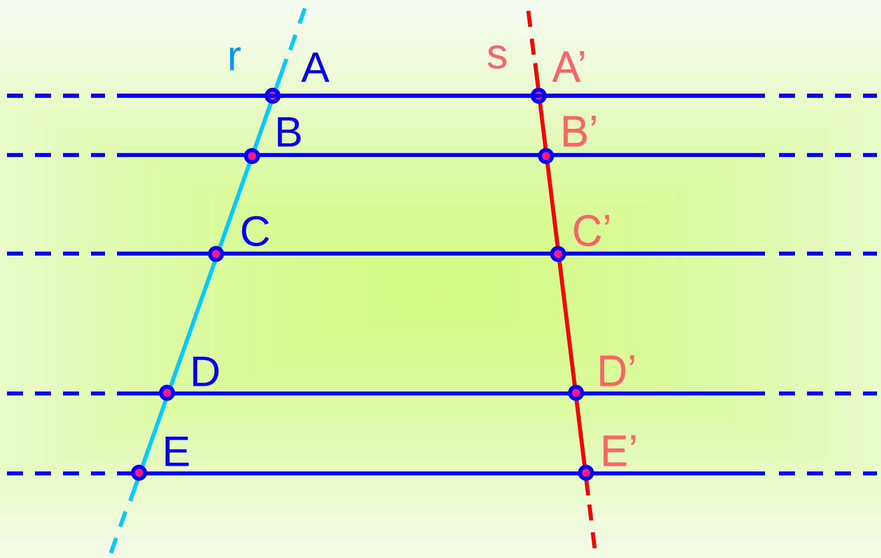
Richiami di geometria euclidea : teorema di Talete

Sussiste il seguente:

teorema (di Talete)

Se un **fascio di rette parallele** è intersecato da due rette trasversali i segmenti tra rette parallele che si formano sulla prima trasversale sono direttamente proporzionali ai segmenti compresi fra le stesse parallele sulla seconda trasversale.

Illustrazione del teorema di Talete



AB :CD = A'B': C'D' = AC :DE = A'C':D'E' = ….

punto medio di un segmento (sul piano cartesiano)

Si affronta ora il problema della determinazione delle coordinate del punto medio di un generico segmento giacente sul piano cartesiano e con inclinazione qualsiasi rispetto agli assi .

Con riferimento alla figura a lato, si consideri il segmento di estremi **$P(x_P, y_P)$** e **$Q(x_Q , y_Q)$**.

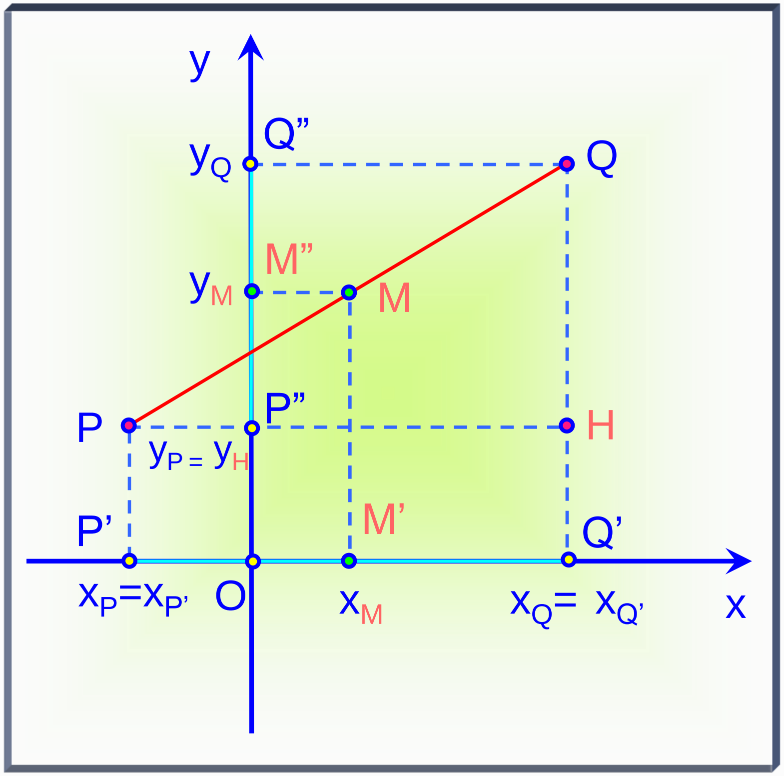
Sia **$M\ (x_M, y_M)$** il suo punto medio. Per il teorema di Talete il punto **M'** (di ascissa **x_M**) ed il punto **M''**(di ordinata **y_M**) sono punti medi rispettivamente del segmento **P'Q'** e del segmento **P''Q''** .

Pertanto l'ascissa del punto medio sarà :

$$x_M = \frac{(x_P + x_Q)}{2}$$

mentre la sua ordinata sara' :

$$y_M = \frac{(y_P + y_Q)}{2}$$



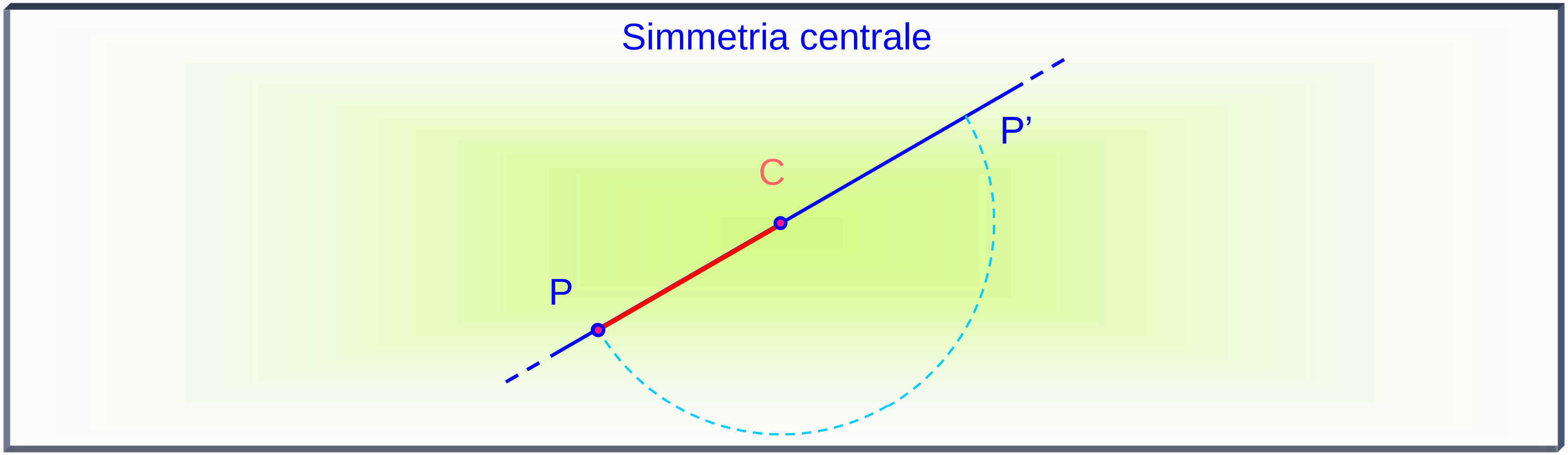
Richiami di geometria euclidea : simmetria centrale

Si ha la seguente:

definizione

assegnato nel piano un punto **C** ,dicesi **simmetria centrale di centro C** una **trasformazione del piano in se'** che associa ad ogni punto **P** del piano un punto **P'** (detto simmetrico di **P** rispetto a **C**) tale che :

- **P, C, P'** giacciono su una stessa retta con **P** e **P'** da parti opposte rispetto a **C**
- **d(P, C) = d(C, P')**



in conseguenza della definizione data in precedenza, il punto **C** risulta essere il punto medio del segmento che ha per estremi i punti simmetrici **P** e **P'**.

equazioni della simmetria centrale

Si pone il seguente:

problema

Dato un centro di simmetria **C** ed un generico punto **P** ,si pone il problema di determinare le coordinate del punto **P’** simmetrico rispetto a **P** e viceversa dato il punto **P’** determinare il punto **P** . Tale problema , di semplice soluzione, viene risolto di seguito.

Con riferimento alla figura a lato , (essendo il centro di simmetria **C** punto medio del segmento **PP’**) per quanto visto in precedenza si avra’:

$$x_C = \frac{(x_P + x_{P'})}{2} \qquad y_C = \frac{(y_P + y_{P'})}{2}$$

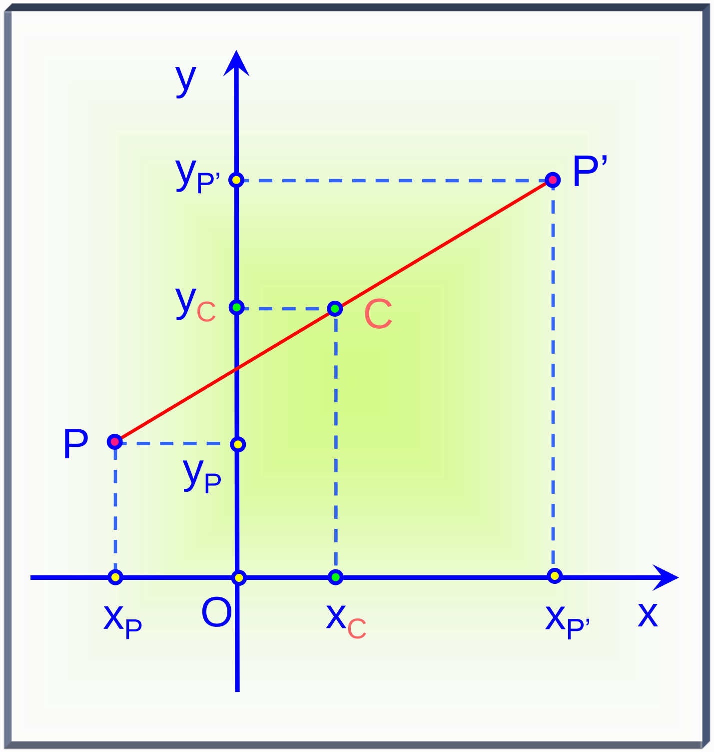
pertanto le coordinate del punto **P’** saranno date da :

$$x_{P'} = 2x_C - x_P \qquad y_{P'} = 2y_C - y_p \qquad \boxed{1}$$

mentre le coordinate del punto **P** saranno date da :

$$x_P = 2x_C - x_{P'} \qquad y_P = 2y_C - y_{p'} \qquad \boxed{2}$$

Le 1 e 2 sono le equazioni della simmetria centrale , rispettivamente nella forma diretta ed inversa :



simmetria centrale con centro nell'origine degli assi coordinati

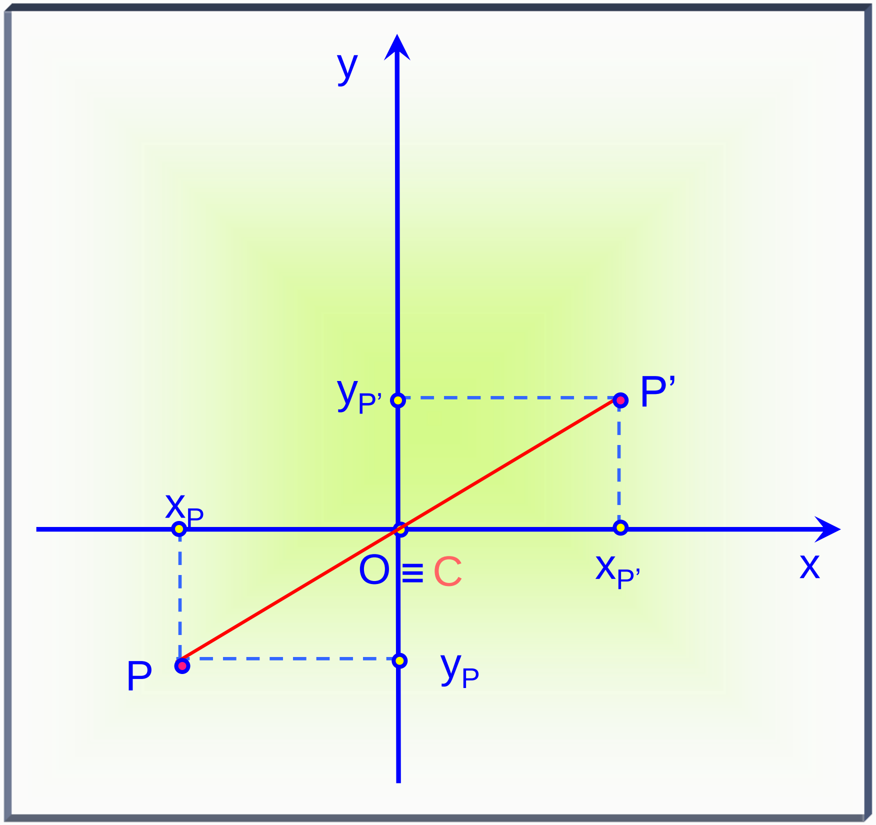
Se il centro di simmetria C coincide con l'origine degli assi cartesiani , si ha allora :

$x_C = 0$ e $y_C = 0$

Pertanto le equazioni della simmetria centrale diretta ed inversa diventano:

$x_{P'} = -x_P$, $y_{P'} = -y_p$ (3)

$x_P = -x_{P'}$, $y_P = -y_{p'}$ (4)



Richiami di geometria euclidea : baricentro di un triangolo

Si ha la seguente:

definizione

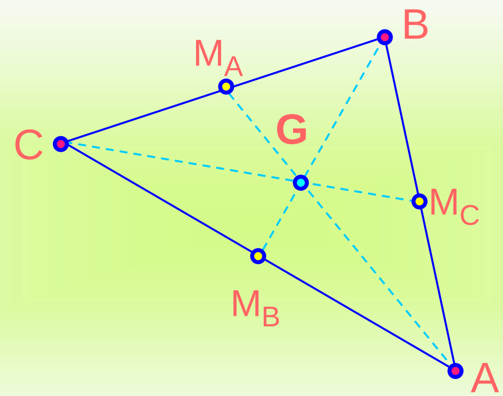
dicesi **baricentro** di un triangolo il punto d'intersezione delle **mediane** relative ai tre lati .

Sussiste il seguente:

teorema

Il baricentro di un triangolo divide ciascuna mediana in due segmenti tali che il segmento che ha per estremo il vertice risulta di lunghezza doppia rispetto a quello che che ha per estremo il punto medio del lato opposto (corrispondente).

teorema del baricentro



$AG = 2GM_A$, $BG = 2GM_B$, $CG = 2GM_c$.

determinazione delle coordinate del baricentro di un triangolo

Si determinano ora, con riferimento alla figura, le coordinate del baricentro di un triangolo di cui sono note le coordinate dei vertici rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano .

Sia il triangolo ABC, applicando il teorema precedente ad una delle tre mediane (p.e. BM_B) si ha : $BG = 2GM_B$

Quindi per il teorema di Talete rispetto al fascio di rette parallele all'asse y tagliate dalla trasversale passante per B e G e dall'asse delle ascisse si ha :

$$x_B - x_G = 2(x_G - x_{MB}) = \left(2x_G - \cancel{2}\,\frac{x_A + x_C}{\cancel{2}}\right)$$

Da cui :

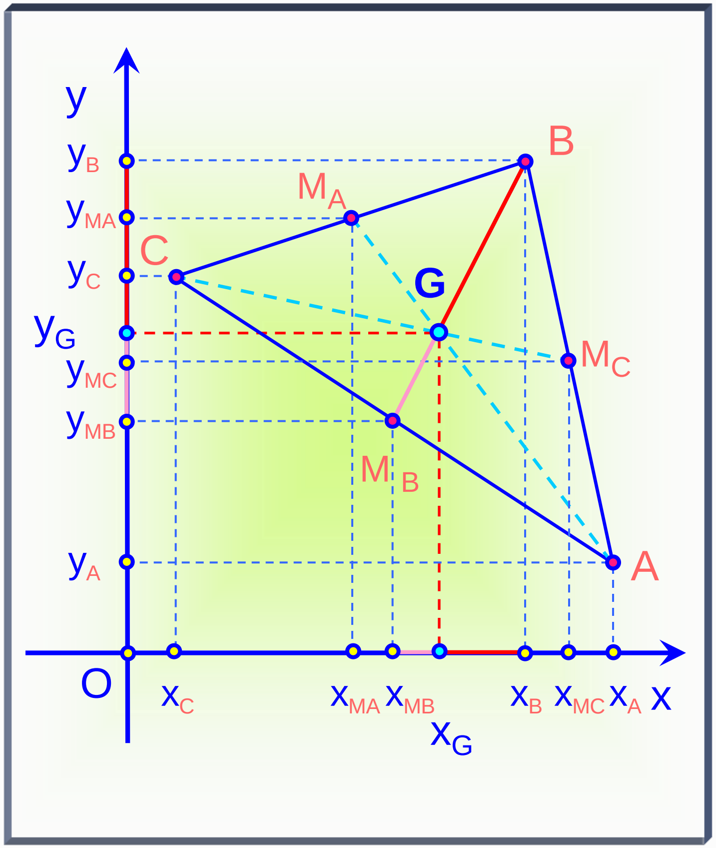
$$3x_G = x_A + x_B + x_C \quad \Rightarrow \quad x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \qquad \boxed{1}$$

Ancora per il teorema di Talete rispetto al fascio di rette parallele all'asse x tagliate dalla stessa trasversale per B e G e dall'asse delle ordinate si ha :

$$y_B - y_G = 2(y_G - y_{MB}) = \left(2y_G - \cancel{2}\,\frac{y_A + y_C}{\cancel{2}}\right)$$

Da cui infine :

$$3y_G = y_A + y_B + y_C \quad \Rightarrow \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \qquad \boxed{2}$$



Le 1 e 2 sono le formule cercate.

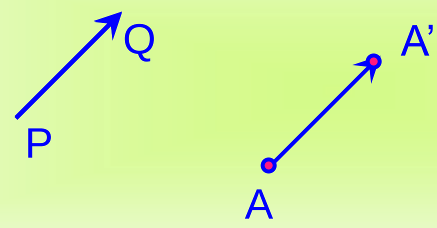
Richiami di geometria euclidea : traslazione nel piano

Si ha la seguente:

definizione

si dice traslazione di vettore $\vec{V} = [\overrightarrow{PQ}]$ una trasformazione del piano in se' che associa ad ogni punto A un punto A' tale che il segmento orientato $\overrightarrow{AA'}$ sia equipollente al segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$.

Traslazione di vettore $\vec{V} = [\overrightarrow{PQ}]$

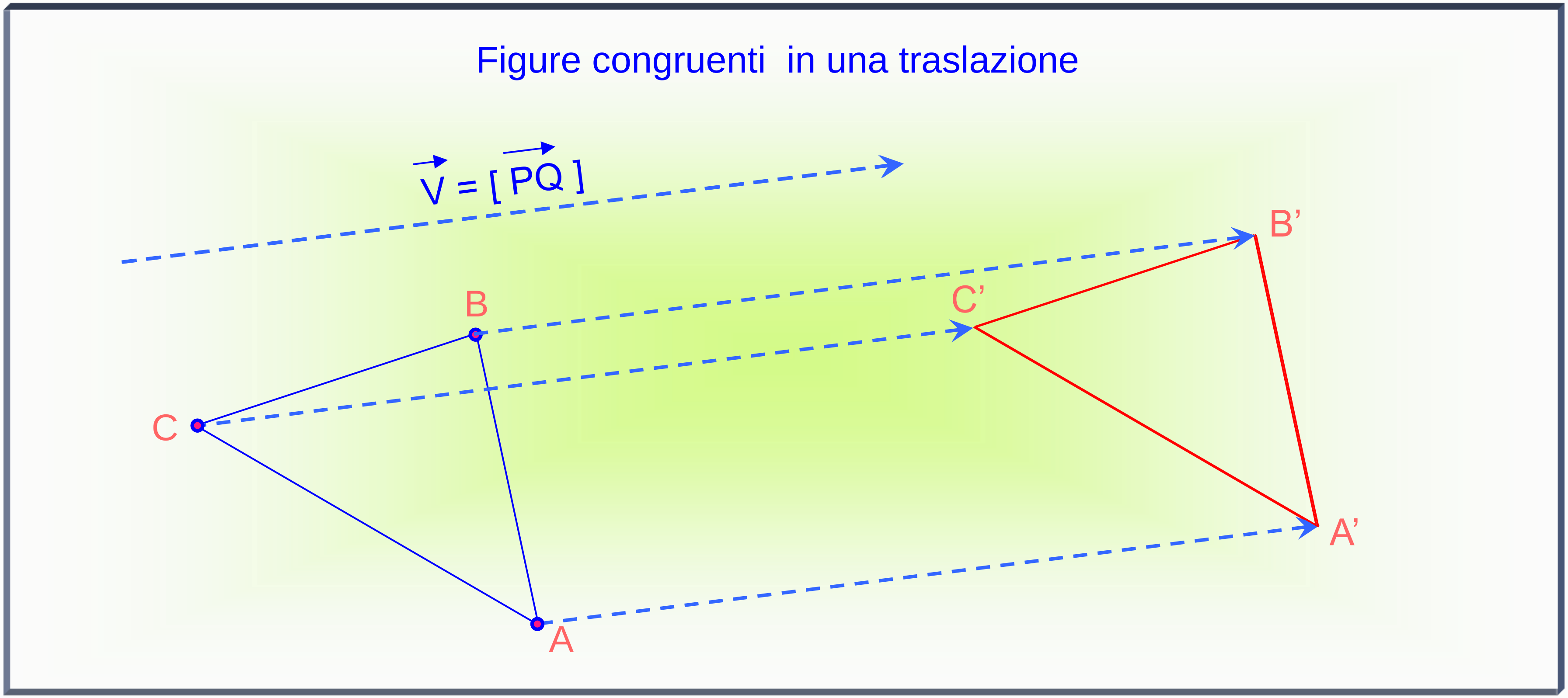


traslazione nel piano : proprietà

Per una traslazione nel piano sussiste la seguente:

Proprieta'

Due figure geometriche che si corrispondono in una traslazione sono tra loro congruenti



traslazione degli assi cartesiani sul piano

Con riferimento alla figura 1 consideriamo un sistema di assi coordinati cartesiani **xOy**. Applicando una traslazione di vettore $\vec{V} = [\,\overrightarrow{OO'}\,]$ si otterra' un nuovo sistema di assi **XO'Y**.

Ci proponiamo di trovare le relazioni che intercorrono tra le coordinate di un generico punto del piano nel vecchio e nel nuovo riferimento .

A tale scopo si indichino con $\mathbf{x_0}$ e $\mathbf{y_0}$ le componenti del vettore $\vec{V}$ nel vecchio sistema di riferimento.

Siano X_P , Y_P e x_P ,y_P rispettivamente le coordinate di un generico punto **P** nel nuovo e nel vecchio riferimento .

Si avrà pertanto :

$$X_P = x_P - x_O \qquad Y_P = y_P - y_O \qquad \boxed{1}$$

$$x_P = x_O + X_P \qquad y_P = y_O + Y_P \qquad \boxed{2}$$

Le 1 e 2 sono le formule cercate per il passaggio da un sistema all'altro.

FIG 1