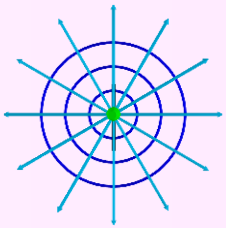
Cinematica
moto armonico



Appunti di Fisica

Prof. Calogero Contrino

definizione

Il moto di un punto materiale **P** è detto armonico se soddisfa le seguenti condizioni:

- La traiettoria è un segmento .
- Le posizioni occupate su di essa dal punto materiale coincidono con le proiezioni ortogonali delle posizioni di un punto **P'** che si muove di un moto fittizio di tipo circolare uniforme su una circonferenza di cui la traiettoria del moto reale è un diametro ortogonale alla direzione di proiezione .

Dalla definizione appare evidente che il moto in questione è di tipo oscillatorio

Si studia nel seguito questo tipo di moto per ricavare l'andamento temporale di tutte le grandezze cinematiche in gioco .

Determinazione della legge oraria

Si determina inizialmente la legge oraria.

Si consideri a tale scopo un sistema di riferimento **xOy** con origine nel punto medio della traiettoria (vedere la figura) la quale giace sull'asse **y**.

La posizione generica del punto **P**, ponendo $\overline{OP'}=A_m$, sarà data da : $y = A_m sen\alpha$

Ed essendo ω il modulo della velocità angolare nel moto fittizio si ha : $\Delta\alpha = \omega\Delta t$

Pertanto, ipotizzando che all'istante iniziale $t_0=0$ il punto **P** si trovi nell'origine del sistema di riferimento $(y_0=0)$ e si stia muovendo con ordinate crescenti (primo quadrante del moto fittizio) , la legge oraria assume la forma : $y(t) = A_m sen\omega t$

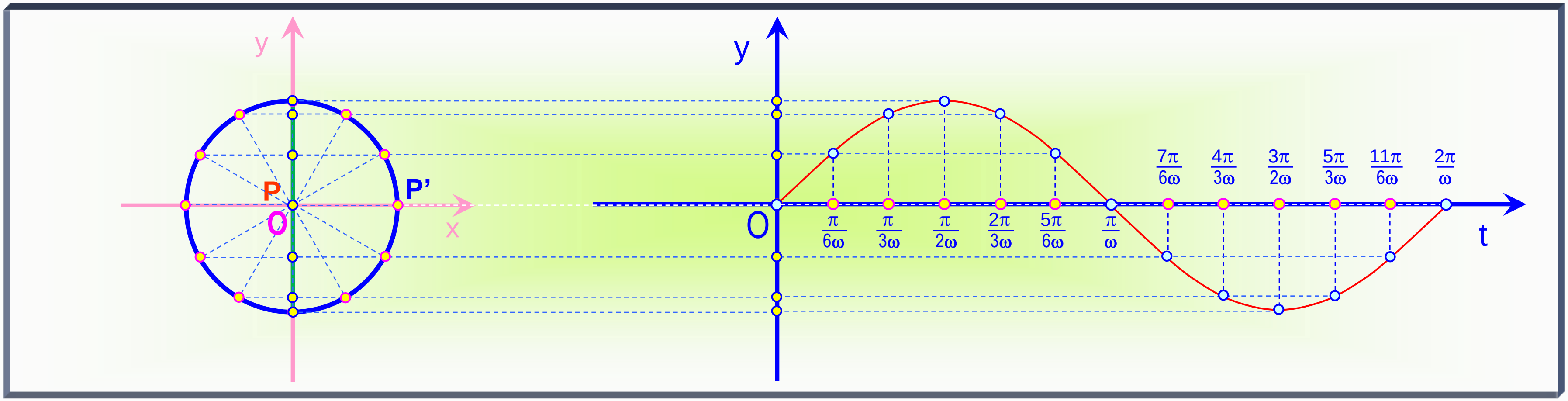
Ci proponiamo ora di rappresentare graficamente la legge oraria appena trovata.

Rappresentazione grafica della legge oraria

Si consideri un sistema di riferimento **tOy** con **t** asse dei tempi e **y** asse delle posizioni istantanee del punto materiale sulla traiettoria.

Al tempo iniziale $t_0 = 0$ il punto materiale si trova, nella sua traiettoria, nell' origine **O** del sistema **xOy** . Tale situazione nel sistema **tOy** , nel quale viene rappresentata la legge oraria, ricade nel punto **O** .

Considerando con cadenza regolare successivi intervalli di tempo $\Delta t = \pi/6\omega$, si individuano le posizioni assunte sulla traiettoria reale dal punto **P** in corrispondenza di quelle assunte dal punto **P'** sulla traiettoria fittizia. Sul piano **tOy** sono tracciati I corrispondenti punti della legge oraria(cerchietti azzurri) . Al variare con continuità di **t** l'andamento del grafico della legge oraria è naturalmente quello tipico di una sinusoide (linea rossa) .



Alcune considerazioni sul vettore velocità istantanea

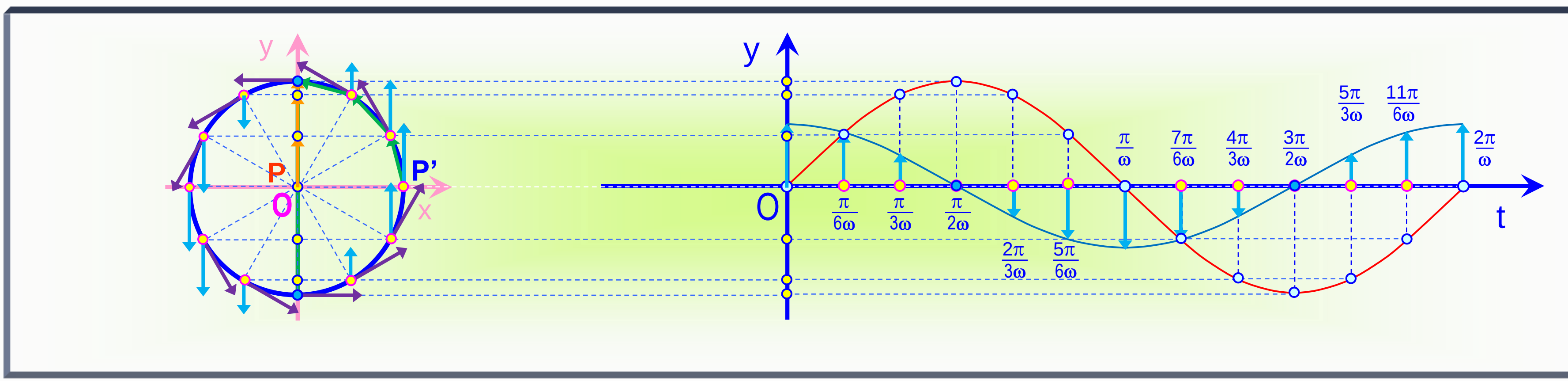
Si consideri il vettore velocità istantanea ; dall'esame della traiettorie (reale e fittizia) e della legge oraria si possono trarre delle informazioni interessanti sul suo andamento temporale al fine di dedurne un'espressione analitica. Dal grafico della legge oraria si osserva che :

nei punti $\mathbf{t = \frac{\pi}{2\omega}}$, $\mathbf{t = \frac{3\pi}{2\omega}}$ la velocità si annulla (tangente orizzontale)

nei punti $t = \mathbf{0}$, $t = \frac{2\pi}{\omega}$ la velocità assume il massimo valore positivo (tangente con massima pendenza)

nel punto $t = \frac{\pi}{\omega}$ la velocità assume il minimo valore negativo (tangente con minima pendenza)

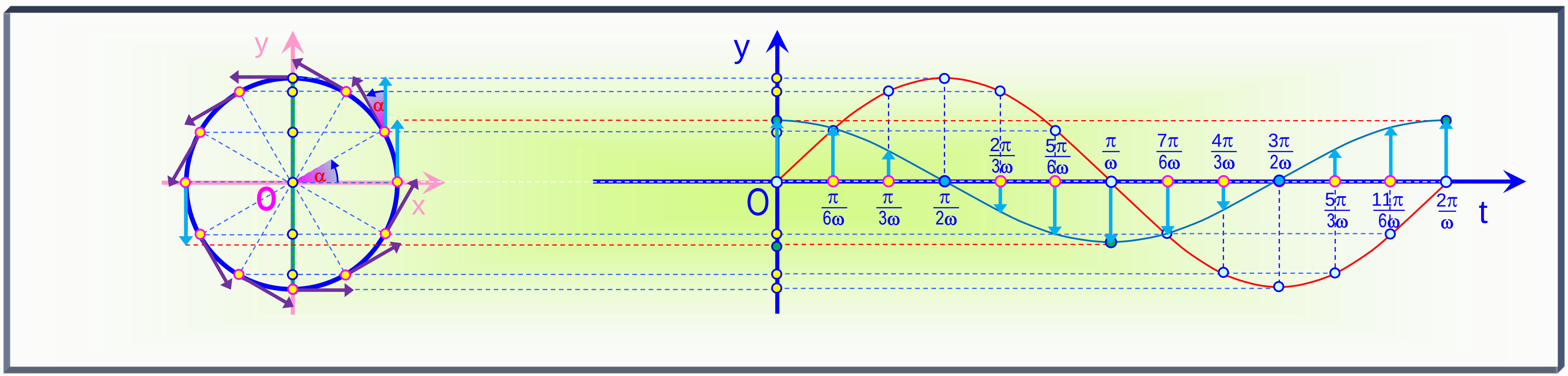
Per valutare questi valori (massimo e minimo) si osservi che (vedi figura) le posizioni del moto reale sono determinati dalle proiezioni delle posizioni del moto fittizio, pertanto anche gli spostamenti del moto reale sono le proiezioni degli spostamenti del moto fittizio, cosi come le velocità del moto reale sono date dalle proiezioni delle velocità del moto fittizio (vedi figura).



Legge di dipendenza temporale della velocità istantanea

Ne consegue che negli istanti $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{\omega}$, stante il parallelismo del vettore e della traiettoria, il modulo della velocità nel moto reale coincide con il modulo della velocità nel moto fittizio e si può pertanto scrivere : $v_{max} = |\vec{v}(t)| = \frac{2\pi A_m}{T} = \omega A_m$

e, per un qualsiasi istante t , essendo $\alpha = \omega t$ si ha la seguente legge di dipendenza dal tempo della velocità istantanea (in figura linea di colore azzurro) : $\vec{v}(t) = |\vec{v}(t)| \cos\alpha(t)\vec{j} = \omega A_m \cos\omega t\ \vec{j}$



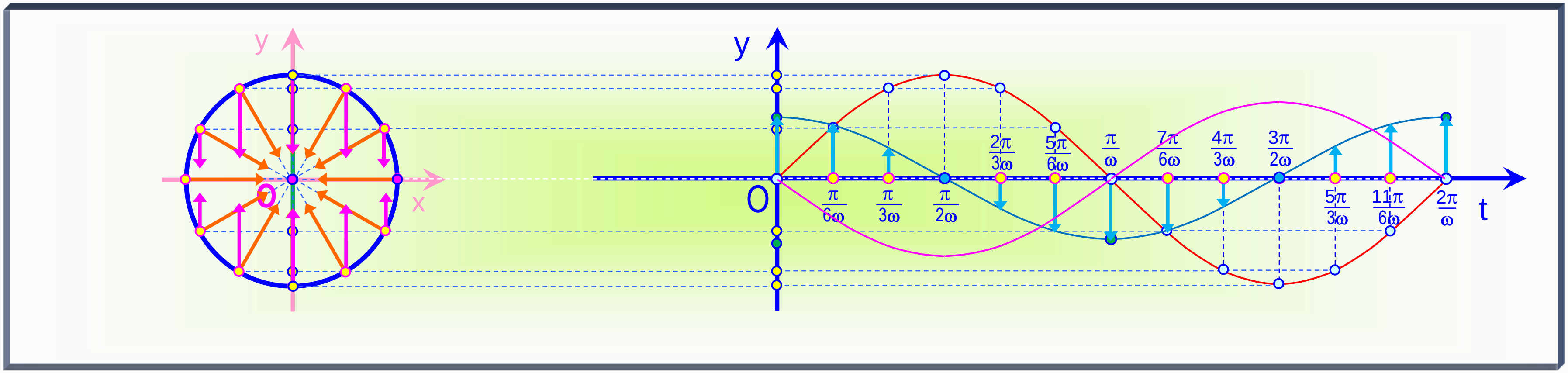
Andamento dell'accelerazione istantanea

Si consideri il vettore accelerazione istantanea (proiezione di quella centripeta); anche in questo caso dall'esame della traiettorie (reale e fittizia) e della legge di dipendenza temporale della velocità si possono trarre delle informazioni interessanti sul suo andamento temporale al fine di dedurne un'espressione analitica.Dal grafico di $\mathbf{v_y(t)}$ (linea azzurra) si osserva che :

nei punti $t = \mathbf{0}$, $t = \dfrac{\pi}{\omega}$, $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ l'accelerazione si annulla (tangente orizzontale)

nei punti $\mathbf{t} = \dfrac{\pi}{2\omega}$, $\mathbf{t} = \dfrac{3\pi}{2\omega}$ l' accelerazione assume rispettivamente il minimo valore negativo ed il massimo valore positivo (tangente con minima e massima pendenza)

Per valutare l'andamento di $\vec{\mathbf{a}}\mathbf{(t)}$ si ricorda che i valori dell'accelerazione sono istante per istante le proiezioni sulla traiettoria dell'accelerazione centripeta del moto fittizio (vedi figura).

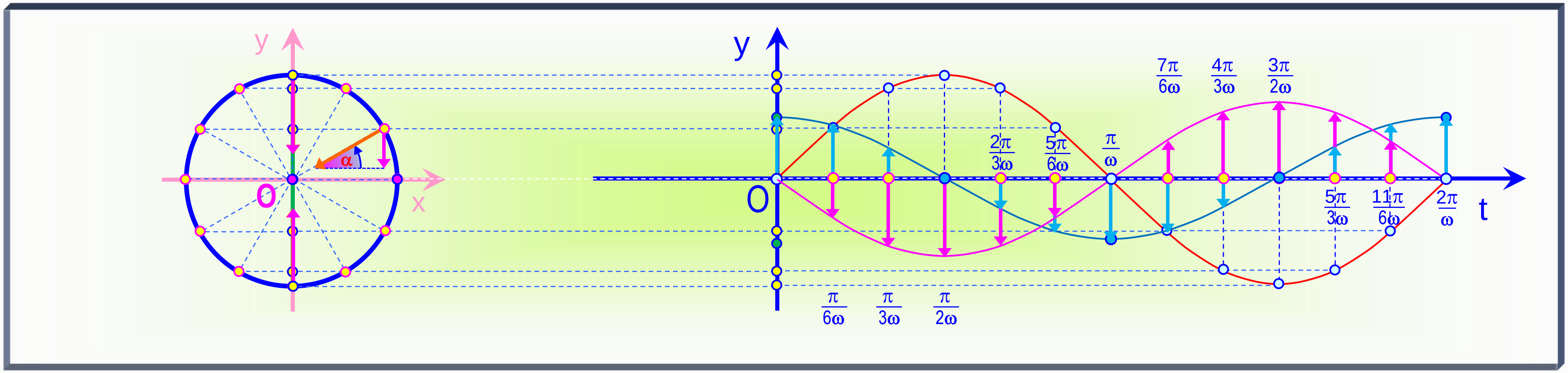


Legge di dipendenza temporale dell'accelerazione istantanea

Ne consegue che negli istanti $t = \frac{\pi}{2\omega}$ e $t = \frac{3\pi}{2\omega}$, stante il parallelismo del vettore accelerazione centripeta e della traiettoria, il modulo dell'accelerazione nel moto reale coincide con il modulo dell'accelerazione nel moto fittizio e si può pertanto scrivere: $a_{max} = |\vec{a}(t)| = a_c = \frac{4\pi^2 A_m}{T^2} = \omega^2 A_m$.

Quindi, per un qualsiasi istante **t**, essendo $\alpha = \omega t$, l'accelerazione istantanea osserva la seguente legge di dipendenza temporale (in figura linea di colore magenta):

$$\vec{a}(t) = -|\vec{a}(t)|\,\text{sen}\,\alpha(t)\,\vec{j} = -\,\omega^2 A_m\,\text{sen}\,\omega t\,\vec{j}$$



terminologia

Ad alcune delle grandezze in gioco nel moto fittizio (circolare uniforme) nel moto reale (armonico) vengono attribuiti nomi diversi , come riportato nella seguente tabella :

Simbolo grandezza	Nome nel moto fittizio	Nome nel moto reale
ω	velocità angolare	pulsazione
y(t)	Componente y del vettore posizione	elongazione
A_m	Raggio della traiettoria	Ampiezza (elongazione max.)

Inoltre si hanno le seguenti nuove definizioni :

- **oscillazione completa** : moto del punto materiale reale corrispondente ad un giro completo compiuto dal punto nel moto fittizio.
- **periodo** : tempo impiegato dal punto materiale reale per compiere una oscillazione completa.
- **frequenza** : numero di oscillazioni compiute dal punto materiale reale in un definito intervallo di tempo unitario (secondo nel S.I.).
- **centro del moto** : punto medio della traiettoria nel moto reale.

Relazione fondamentale

Si procede nel seguito alla determinazione di una relazione che caratterizza un qualsiasi moto armonico in generale .

In un generico istante **t** (vedi figura) siano **P** e **P’** le posizioni del punto nel moto reale ed in quello fittizio , $\vec{a}$ ed $\vec{a}_c$ le relative accelerazioni, $|y| = \overline{OP}$ il valore assoluto dell’ elongazione nel moto reale ed **R** il raggio della traiettoria nel moto fittizio

I triangoli rettangoli **OPP’** e quello avente per ipotenusa $\vec{a}_c$ e cateto $\vec{a}$ risultano simili, pertanto si può scrivere la seguente proporzione: $\dfrac{|\vec{a}|}{|y|} = \dfrac{|\vec{a}_c|}{R} = \omega^2$ da cui si ottiene: $|\vec{a}| = \omega^2\, |y|$

ed infine evidenziando l’opposizione dei segni di **a** e **y** si ha: $a = -\,\omega^2 y \;\rightarrow\; \vec{a} = -\,\omega^2 y\, \vec{j}$ $\boxed{1}$

La ***1)*** è l’equazione cercata ed è detta **equazione fondamentale del moto armonico**