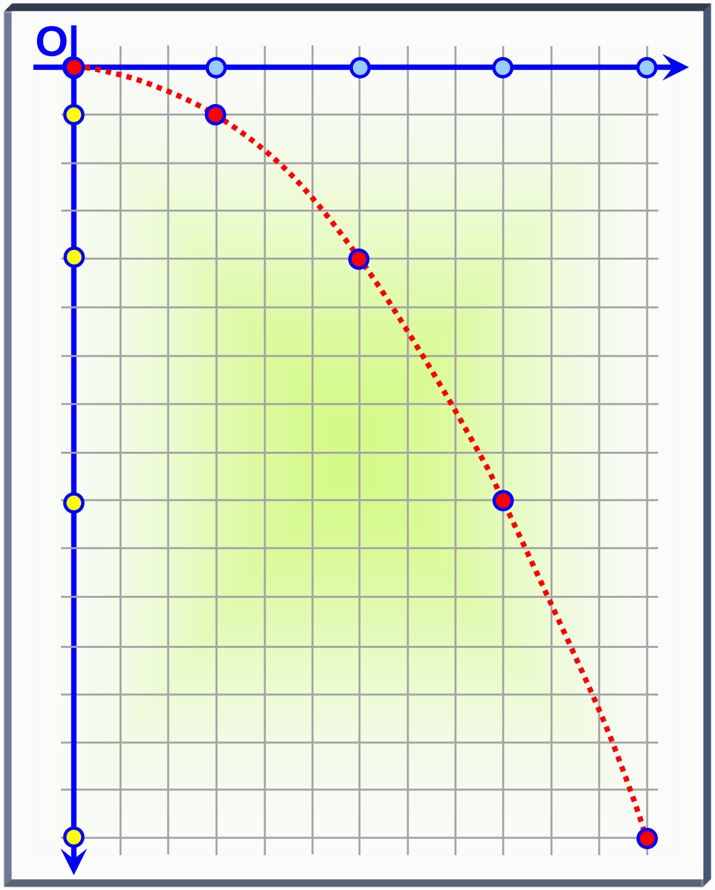
Caduta di un grave con velocità iniziale orizzontale

Si esamina nel seguito il moto di un corpo soggetto alla forza di gravità terrestre lanciato orizzontalmente.In tale contesto esso è soggetto a due movimenti uno con accelerazione costante (**g**) lungo la verticale di caduta (asse **y** nella figura) ed uno con velocità costante lungo l'orizzontale (asse **x**).



Nel sistema di riferimento **xOy**, posto $t_0=0$, $x_0=0$, $y_0=0$, si ha : $v_{0x} = v_0$, $v_{0y}=0$, $a_x = 0$, $a_y = g$.

Le leggi orarie dei due movimenti sono date da:

$$x(t) = v_0 t \qquad \text{(moto lungo l'asse x)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} g t^2 \qquad \text{(moto lungo l'asse y)}$$

L'equazione della traiettoria si ottiene eliminando la variabile tempo dalle due equazioni . Si ha:

$$t = \frac{x(t)}{v_0} \Rightarrow t^2 = \frac{x^2(t)}{v_0} \text{ da cui segue: } y = \frac{g}{2v_0} x^2 \qquad \boxed{1)}$$

La traiettoria rappresentata dal'equazione ***1)*** è pertanto un arco di parabola.

Caduta di un grave con velocità iniziale orizzontale

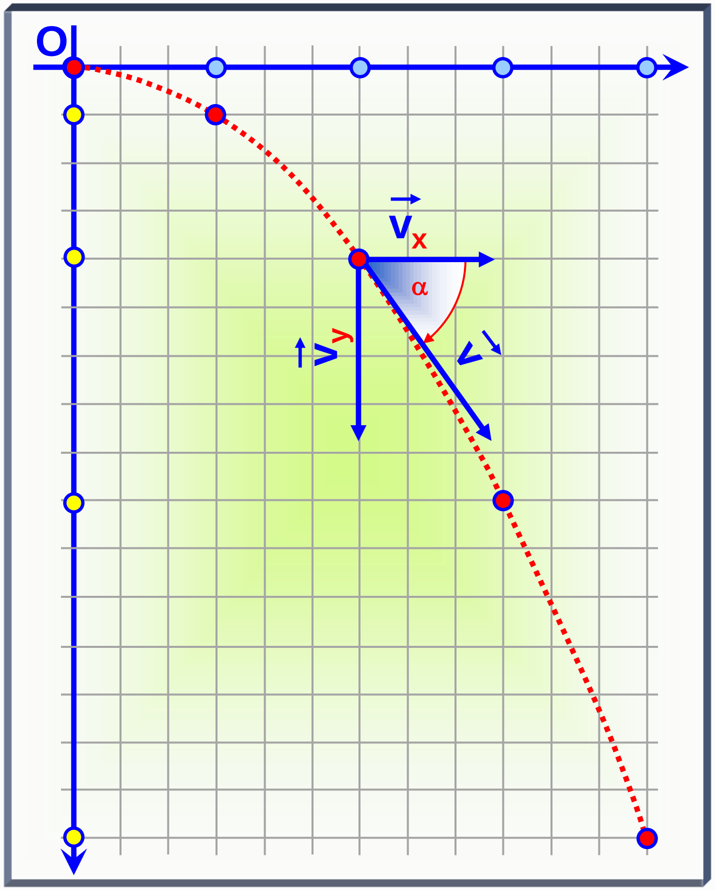
Per determinare in un generico istante **t ($0 < t < t_F$)** la velocità del corpo, essendo la velocità costante lungo l'asse **x**, basterà determinare la sua componente lungo **y** come segue: $v_y = g\,t$

Da cui si avrà :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_{0x}\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} = v_0\,\vec{i} + gt\,\vec{j}$$

Con $|v| = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}}$

e $\alpha_V = \operatorname{arctg}\dfrac{v_y}{v_x} = \operatorname{arctg}\dfrac{gt}{v_0}$



Caduta di un grave con velocità iniziale obliqua

Si esamina ora il moto di un corpo soggetto alla forza di gravità terrestre lanciato con componenti orizzontale e verticale della velocità. In questo caso il moto sulla verticale avrà una velocità iniziale mentre si ripeterà la situazione del caso precedente lungo l'orizzontale

Nel sistema di riferimento **xOy**, (vedi fig.a lato)

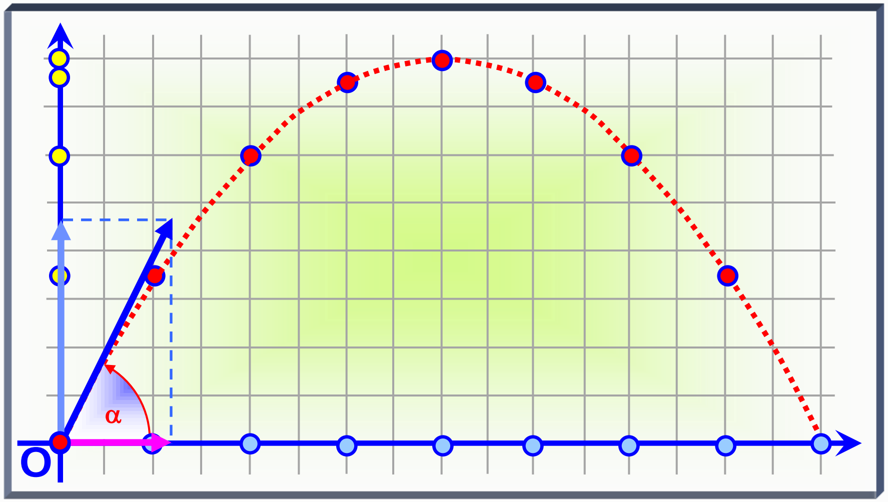
posto $t_0=0$, $x_0=0$, $y_0=0$, si ha :

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y}=v_0 \mathrm{sen}\alpha$, $a_x=0$, $a_y=g$.

Le leggi orarie dei due moti sono date da:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha\, t$$ (moto lungo l'asse x)

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \mathrm{sen}\alpha\, t$$ (moto lungo l'asse y)



L'equazione della traiettoria si ottiene eliminando la variabile tempo dalle due equazioni.

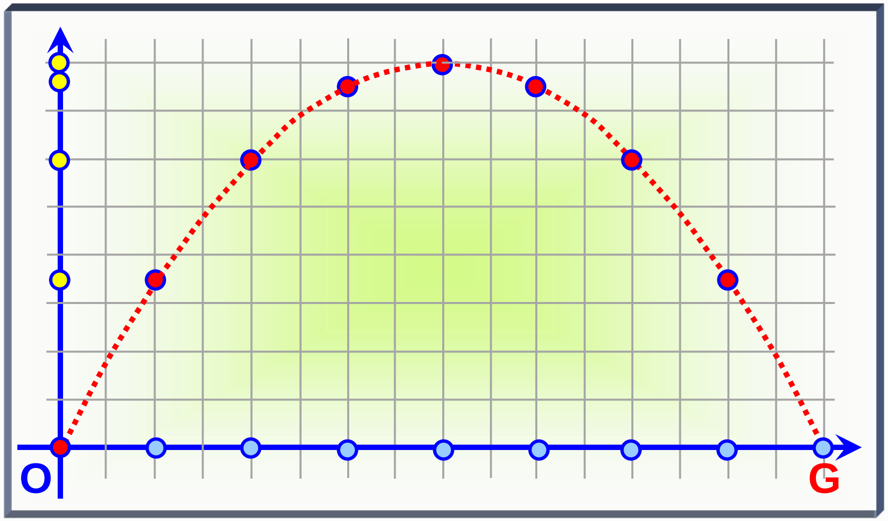
Dalla prima si ha: $t = \dfrac{x(t)}{v_0 \cos\alpha} \Rightarrow t^2 = \dfrac{x^2(t)}{v_0^2 \cos^2\alpha}$ e sostituendo nella seconda si ottiene:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \frac{v_0 \mathrm{sen}\alpha}{v_0 \cos\alpha} x \qquad \boxed{1)}$$

Che è l'equazione della traiettoria cercata.

Caduta di un grave con velocità iniziale obliqua

Per **t >0** l'equazione **1)** rappresenta un arco di parabola la cui concavità è rivolta verso il basso, risulta infatti: $-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} < 0$



Detto **G** il punto in cui la traiettoria interseca l'asse orizzontale (vedi fig.a lato),si definisce gittata la distanza **OG = x_G** . Per determinarla si risolve il sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}x - \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 \end{cases}$$

La risolvente è : $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}x - \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 = 0$ da cui segue : $x\left(\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x\right) = 0$

Si ha quindi: $x = 0 \rightarrow x_0 = 0$ **(ascissa del punto di lancio)** oppure :

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x = 0 \rightarrow \frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow x = x_G = \frac{\operatorname{sen}\alpha\, 2V_0^2\cos^2\alpha}{\cos\alpha\, g}$$

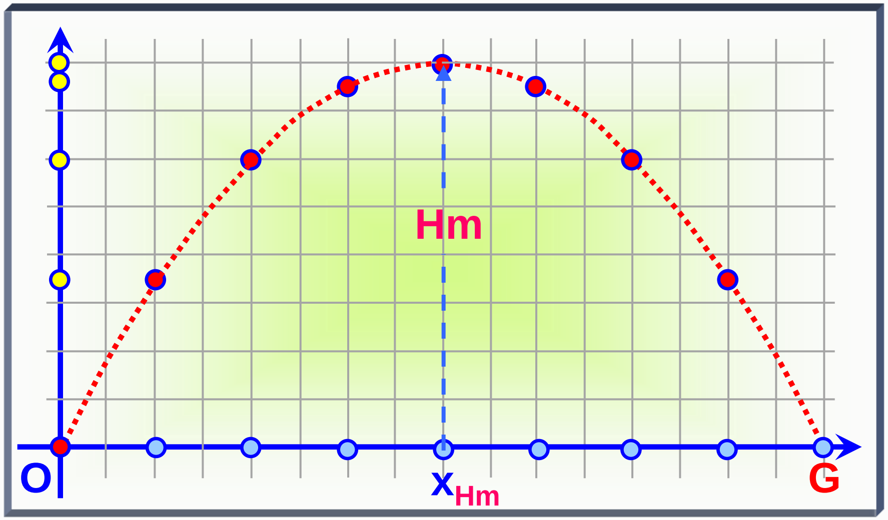
Semplificando si ha infine: $\boxed{x_G = \dfrac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha V_0^2}{g} = \dfrac{\operatorname{sen}2\alpha\, V_0^2}{g}}$

Caduta di un grave con velocità iniziale obliqua

Per la simmetria della traiettoria , l'ascissa del punto in cui si raggiunge l'altezza massima è :

$$x_{Hm} = \frac{x_G}{2} = \frac{2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha\, V_0^2}{2g} = \frac{\mathrm{sen}2\alpha\, V_0^2}{2g}$$

L'altezza massima raggiunta dal proiettile si ottiene sostituendo x_{Hm} nell'equazione della traiettoria.



Pertanto da : $y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + \frac{\mathrm{sen}\alpha}{\cos\alpha}x$

Si ha successivamente :

$$y = Hm = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\left(\frac{\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha\, V_0^2}{g}\right)^2 + \frac{\mathrm{sen}\alpha}{\cos\alpha}\,\frac{\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha\, V_0^2}{g} =$$

$$= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,\frac{\mathrm{sen}^2\alpha\cos^2\alpha\; V_0^4}{g^2} + \frac{\mathrm{sen}^2\alpha\, V_0^2}{g} = -\frac{\mathrm{sen}^2\alpha\; V_0^2}{2g} + \frac{\mathrm{sen}^2\alpha\, V_0^2}{g} = \frac{\mathrm{sen}^2\alpha\, V_0^2}{g}$$

Caduta di un grave con velocità iniziale obliqua

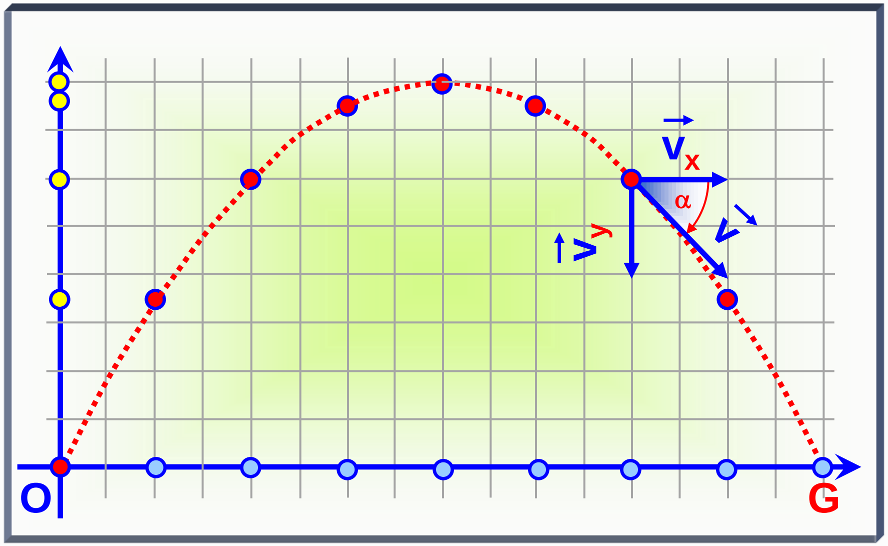
Si determina ora l'istante t_F in cui viene colpito il bersaglio **(**si noti che avendo posto in precedenza $t_0 = 0$ ne segue che l'intervallo $\Delta t = t_F - t_0 = t_F$, esso è detto tempo di volo **)**.

Dalla relazione : $t = \dfrac{x}{V_{0x}}$

Sostituendo ad **x** l'espressione della gittata si avrà successivamente :

$$t_F = \frac{x_G}{V_{0x}} = \frac{2\text{sen}\alpha \cos\alpha V_0^2}{V_0 \cos\alpha\, g} = \frac{2\text{sen}\alpha V_0}{g}$$

Il tempo impiegato per raggiungere l'altezza massima, pari alla metà di t_F, sarà dunque dato da : $t_{Hm} = \dfrac{t_F}{2} = \dfrac{\text{sen}\alpha V_0}{g}$



Per determinare in un generico istante $t \; (0 < t < t_F)$ la velocità del proiettile, essendo la velocità costante lungo l'asse **x**, basterà determinare la sua componente lungo **y** come segue:

$V_y = V_{0y} - g\,t = V_0\text{sen}\alpha - g\,t$ e il vettore velocità sarà : $V = V_x\,i + V_y\,j$

Con $|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ e $\alpha_V = \text{arctg}\dfrac{V_y}{V_x}$

Moto del proiettile – parabola di sicurezza

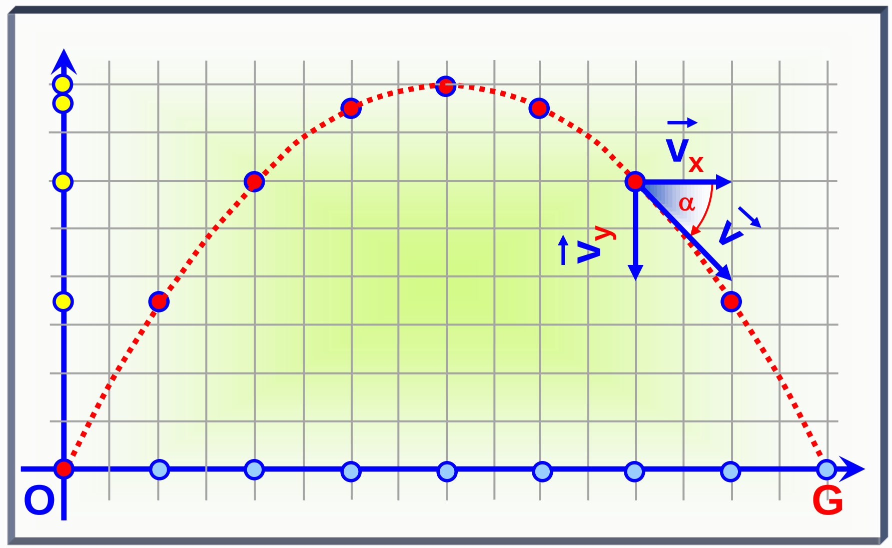
Si determina ora l'istante t_F in cui viene colpito il bersaglio (si noti che avendo posto in precedenza $t_0 = 0$ ne segue che l'intervallo $\Delta t = t_F - t_0 = t_F$, esso è detto tempo di volo).

Dalla relazione : $t = \dfrac{x}{V_{0x}}$

Sostituendo ad **x** l'espressione della gittata si avrà successivamente :

$$t_F = \frac{x_G}{V_{0x}} = \frac{2\text{sen}\alpha\cos\alpha V_0^2}{V_0\cos\alpha\, g} = \frac{2\text{sen}\alpha V_0}{g}$$

Il tempo impiegato per raggiungere l'altezza massima, pari alla metà di t_F, sarà dunque dato da : $t_{Hm} = \dfrac{t_F}{2} = \dfrac{\text{sen}\alpha V_0}{g}$



Per determinare in un generico istante $t\ (0 < t < t_F)$ la velocità del proiettile, essendo la velocità costante lungo l'asse **x**, basterà determinare la sua componente lungo **y** come segue:

$V_y = V_{0y} - g\,t = V_0\text{sen}\alpha - g\,t$ e il vettore velocità sarà : $V = V_x\,\mathbf{i} + V_y\,\mathbf{j}$

Con $|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ e $\alpha_V = \text{arctg}\dfrac{V_y}{V_x}$